Analysis 1 für Lehramt

Lösungen

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Dr. Andreas Stahl

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

1 Lösungen 5

1.1 zu Grundbegriffe 5
1.2 zu Folgen und die reellen Zahlen 20
1.3 zu Reihen und die eulersche Zahl 29
1.4 zu Stetigkeit 41
1.5 zu Differenzierbarkeit 47
1.6 zu Potenzreihen 56
1.7 zu Das Riemann-Integral 62

1 Lösungen

1.1 zu Grundbegriffe

Lösung zu Aufgabe 1

a) Bei dieser Aussage handelt es sich um eine elementare Aussage. Die Verneinung erhalten wir mit

Ich besitzt keinen Hund.

b) Bei dieser Aussage liegt eine „und“-Konstruktion vor, sodass wir die einzelnen Teile der Aussage verneinen und mit „oder“ verbinden:

Mein Hund ist leise oder groß.

c) Zusätzlich zu einer „und“-Konstruktion wird in dieser Aussage der Existenzquantor $\exists$ verwendet („Es gibt ...“). Wir erhalten die Verneinung mit dem Allquantor und der „oder“-Konstruktion analog zum letzten Beispiel:

Alle Hunde sind leise oder klein.

d) Diese Aussage beinhaltet zwei Quantoren. Auf der einen Seite existiert ein Hund (Existenzquantor) und auf der anderen Seite wird dieser von allen anderen Hunden (Allquantor) respektiert. Die Verneinung erhalten wir durch Verneinen der einzelnen Quantoren:

Für alle Hunde existiert ein anderer Hund, der ihn nicht respektiert.

e) Ähnlich wie bei der vorangegangenen Aussage handelt es sich um zwei Quantoren, jedoch in umgekehrter Reihenfolge. Mit dem gleichen Prinzip erhalten wir die Verneinung:

Es gibt einen Hund, der keinen anderen Hund respektiert.

f) Das letzte unterscheidet sich vom vorletzten Beispiel durch die Änderung des Existenzquantors und der Aussage, dass genau ein anderer Hund respektiert wird. Die Verneinung beinhaltet in diesem keinen oder mehr als einen Hund:

Es gibt einen Hund, der keinen oder mehr als einen Hund respektiert.

Lösung zu Aufgabe 2
Für die Verneinung der mathematischen Aussagen gehen nach dem allgemeinen Schema vor: Umdrehen der Quantoren und Verneinen der letzten Aussage:

a) $\exists n \in \mathbb{N}\, \forall m \in \mathbb{N} : \; n \geq m$

b) $\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall r \in \mathbb{N} : \; n+r \neq m$

c) $\exists a \in A\, \forall b \in B : \; \neg a \vee b$

Lösung zu Aufgabe 3

a) Wir gehen die komplexen Aussagen stückweise in der Wahrheitstafel durch. Dabei kürzen wir die Aussage der Übersicht halber wie folgt ab

$$((A \vee B) \to C) \to ((A \to C) \vee (B \to C) = (1)$$

und erhalten:

A	B	C	$A \vee B$	$(A \vee B) \to C$	$A \to C$	$B \to C$	$(A \to C) \vee (B \to C)$	(1)
w	w	w	w	w	w	w	w	w
w	w	f	w	f	f	f	f	w
w	f	w	w	w	w	w	w	w
w	f	f	w	f	f	w	w	w
f	w	w	w	w	w	w	w	w
f	w	f	w	f	w	f	w	w
f	f	w	f	w	w	w	w	w
f	f	f	f	w	w	w	w	w

b) In diesem Beispiel kürzen wir die Aussage mit

$$A \vee (\neg(B \wedge (C \to B))) = (2)$$

und bauen sukzessive folgende Wahrheitstafel auf:

A	B	C	$C \to B$	$B \wedge (C \to B)$	$\neg(B \wedge (C \to B))$	(2)
w	w	w	w	w	f	w
w	w	f	w	w	f	w
w	f	w	f	f	w	w
w	f	f	w	f	w	w
f	w	w	w	w	f	f
f	w	f	w	w	f	f
f	f	w	f	f	w	w
f	f	f	w	f	w	w

Lösung zu Aufgabe 4
Da eine Menge aus wohlunterscheidbaren Elementen bestehen muss, handelt es sich bei A um eine Menge. Stattdessen handelt es sich bei der Menge B nicht um eine Menge, da die beiden Elemente a und a nicht unterscheiden lassen.

Lösung zu Aufgabe 5
Anhand der Regeln für die Mengenoperationen erhalten wir

- $A \cup B = \{1, 2, \text{a}, \text{b}, \text{c}, \text{d}, \text{aa}, \text{ab}, \text{ac}, \text{ad}, \text{bb}, \text{abc}\}$
- $A \cap B = \{1, 2, \text{a}, \text{bb}, \text{ac}\}$
- $A \setminus B = \{\text{b}, \text{aa}, \text{ab}, \text{ad}\}$
- $B \setminus A = \{\text{c}, \text{d}, \text{abc}\}$

Lösung zu Aufgabe 6
Für die Gleichheit von Mengen beweisen wir die zwei Teilmengeneigenschaften, dass die linke Seite Teilmenge der rechten Seite und umgekehrt ist. Im Falle der Ungleichheit reicht ein Gegenbeispiel aus. Damit gilt:

a) **Hinrichtung** $(X\setminus Y)\setminus Z \subseteq X\setminus(Y \cup Z)$
Sei $x \in (X\setminus Y)\setminus Z$ beliebig aber fest, so folgern wir:

$$\begin{aligned} x \in (X\setminus Y)\setminus Z &\Rightarrow x \in (X\setminus Y) \wedge x \notin Z \\ &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \wedge x \notin Z \\ &\Rightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y) \wedge \neg(x \in Z) \\ &\Rightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y \vee x \in Z) \\ &\Rightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y \cup Z) \\ &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \cup Z \\ &\Rightarrow x \in X\setminus(Y \cup Z) \end{aligned}$$

Jegliche Folgerung können wir ebenfalls von unten nach oben lesen:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow x \in X\setminus(Y \cup Z) \\ &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \cup Z \\ &\Rightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y \cup Z) \\ &\Rightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y \vee x \in Z) \\ &\Rightarrow x \in X \wedge \neg(x \in Y) \wedge \neg(x \in Z) \\ &\Rightarrow x \in X \wedge x \notin Y \wedge x \notin Z \\ &\Rightarrow x \in (X\setminus Y)\setminus Z \\ &\Rightarrow x \in (X\setminus Y) \wedge x \notin Z \end{aligned}$$

Insgesamt gelten somit beide Teilmengeneigenschaften und wir haben die Behauptung gezeigt.

b) Bei dieser Aussage fällt uns auf, dass auf der linken Seite alle Elemente zwingend in X enthalten sein müssen, da wir lediglich Elemente aus Y und Z „herausnehmen“. Auf der rechts Seite vereinigen wir jedoch mit Z, sodass ebenso Elemente, die nicht in X enthalten sein können, möglich sind. Daher konstruieren wir das Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} X &= \{1\} \\ Y &= \emptyset \\ Z &= \{2\} \end{aligned}$$

Damit gilt zum Einen

$$X \backslash (Y \backslash Z) = \{1\} \backslash (\emptyset \backslash \{2\}) = \{1\} \backslash \emptyset = \{1\}$$

und zum Anderen

$$(X \backslash Y) \cup Z = (\{1\} \backslash \emptyset) \cup \{2\} = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\},$$

sodass die Mengen im Allgemeinen nicht gleich sind.

c) Für die dritte Aussage erkennen wir ein ähnliches Phänomen wie bei der zweiten Aussage. Während auf der linken Seite lediglich Element aus X enthalten sein können, sind auf der rechten Seite auch Elemente aus Y und Z möglich. Mit dem gleichen Gegenbeispiel wie aus der zweiten Aussage erhalten wir auf der linken Seite

$$X \backslash (Y \cap Z) = X \backslash (\emptyset \cap Z) = X \backslash \emptyset = X = \{1\}$$

und auf der rechten Seite

$$X \cup ((Y \cup Z) \backslash (Y \cap Z)) = X \cup (\emptyset \cup Z) \backslash (\emptyset \cap Z) = X \cup (Z \backslash \emptyset) = X \cup Z = \{1\} \cup \{2\} = \{1, 2\}.$$

Damit gilt auch die dritte Aussage im Allgemeinen nicht.

Lösung zu Aufgabe 7

Betrachten wir zunächst den Fall, dass $f \circ f = f$. Bei Aufgaben, bei denen es um „beweise oder widerlege“ geht, bietet es sich an im Kopf oder durch Aufschreiben „einfache Fälle“ durchzuspielen, da diese oft ein Gegenbeispiel liefern. Wenn die einfachen Fälle funktionieren, lohnt es sich einen allgemeinen Beweis zu probieren. In diesem Fall wäre eine Funktion f die alle Elemente auf ein Element abbildet ein solcher einfacher Fall. Damit der Gedanke „alles“ wird auf ein Element abgebildet Sinn ergibt, betrachten wir mehr als 1 Element in den Mengen X und Y. Daher seien $X = Y = \{1, 2\}$ und $f(1) = f(2) = 1$. Dann gilt für f die Eigenschaft

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(1) = 1.$$

Es werden sowohl von f als auch von $f \circ f$ alle Elemente auf 1 abgebildet, sodass $f \circ f = f$ gilt. Unsere so konstruierte Abbildung ist aber weder injektiv, denn

$$\text{es ist } f(1) = f(2), \text{ aber } 1 \neq 2$$

noch surjektiv, da

$$f^{-1}(\{2\}) = \emptyset$$

gilt. Daher haben wir ein Gegenbeispiel für 1. und 2. konstruiert.

Schränken wir jedoch die Mengen X und Y auf $X = Y = \{1\}$ ein, so ist f sowohl injektiv als auch surjektiv, sodass 3. und 4. ebenfalls nicht gelten.

Im Falle von

$$f \circ f = f^{-1}$$

besitzt f eine Umkehrfunktion. Es gilt

$$f \circ (f \circ f) = \mathrm{id}.$$

Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn sie eine Umkehrfunktion besitzt, sodass wir aufgrund dieser Äquivalenz aussagen können, dass sowohl a) als auch b) gelten und c) und d) falsch sind

Lösung zu Aufgabe 8

a) Da mit der dritten Potenz negative Zahlen auf negative und positive Zahlen auf positive abgebildet werden, vermuten wir, dass die Funktion injektiv ist. Seien daher zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ mit $f(x) = f(y)$. Wir berechnen direkt:

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & f(y) \\ \Leftrightarrow & x^3 & = & y^3 \\ \Leftrightarrow & x & = & y \end{array}$$

Somit ist f injektiv.

Da $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ gilt, vermuten wir, dass die Funktion auch surjektiv ist. Daher geben wir zu beliebigem Element des Zielbereichs $y \in \mathbb{R}$ ein Element des Definitionsbereichs $x \in \mathbb{R}$ an, sodass $f(x) = y$ gilt. Wir berechnen dazu:

$$\begin{array}{rrcl} & f(x) & = & y \\ \Leftrightarrow & x^3 & = & y \\ \Leftrightarrow & x & = & \operatorname{sign}(y) \cdot \sqrt[3]{|y|} \end{array}$$

Die Funktion $\operatorname{sign}(y)$ weist einer Zahl y das Vorzeichen zu:

$$\operatorname{sign}(y) = \begin{cases} 1, & y > 0 \\ 0, & y = 0 \\ -1, & y < 0 \end{cases}.$$

Wenn man es mathematisch genau nimmt, haben wir die Wurzelfunktionen lediglich für positive Zahlen definiert und können keine dritte Wurzel aus einer negativen Zahl ziehen. Diese (mathematische) Genauigkeit wird vermutlich nicht gefordert sein, dennoch möchten wir es an dieser Stelle nicht unerwähnt lassen und schreiben statt $\sqrt[3]{y}$, daher den Wert $\operatorname{sign} \cdot \sqrt[3]{|y|}$. Auf diese Weise ziehen wir die dritte Wurzel immer aus einer nicht-negativen Zahl und versehen den Wert im Anschluss mit dem nötigen Vorzeichen. Zu einem gegebenen Wert y erhalten wir daher durch $x = \sqrt[3]{y}$ ein Urbild, welches wohldefiniert ist (dies bedeutet, wir erhalten für jedes y ein Element aus dem Definitionsbereich) und somit ist f surjektiv.

b) Mit der gleichen Überlegung wie im ersten Beispiel, vermuten wir, dass x^k auf dem Definitionsbereich $[0, 1]$ injektiv und surjektiv ist.

Zur Injektivität:
Seien $x, y \in [0, 1]$ mit $g(x) = g(y)$ gegeben, so folgt

$$\begin{array}{rrcl} & g(x) & = & gf(y) \\ \Leftrightarrow & x^k & = & y^k \\ \Leftrightarrow & x & = & y \end{array}$$

Die letzte Äquivalenz gilt dabei, da wir lediglich positive Zahlen x und y betrachten, sodass bei geradem Exponent k der Betrag wegfällt.

Zur Surjektivität:
Wir berechnen zu jedem $x \in [0, 1]$ ein Urbild durch

$$\begin{array}{rrcl} & g(x) & = & y \\ \Leftrightarrow & x^k & = & y \\ \Leftrightarrow & x & = & \sqrt[k]{y}, \end{array}$$

sodass die Abbildung surjektiv ist.

c) Im letzten Beispiel vermuten wir ebenfalls Injektivität, da wir keinen Anhaltspunkt finden, der ein Abbilden von zwei Elementen auf ein gleiches Element im Zielbereich nahelegt. Wir berechnen für $x, y \in [0, 1]$

$$\begin{array}{rrcl} & h(x) & = & h(y) \\ \Leftrightarrow & \frac{2}{3}\cdot x & = & \frac{2}{3}\cdot y \\ \Leftrightarrow & x & = & y, \end{array}$$

sodass die Injektivität gezeigt ist.

Für die Surjektivität erkennen wir, dass die Funktion monoton wachsend ist, das Bild des größten Elements des Definitionsbereichs - $h(1) = \frac{2}{3}\cdot 1 = \frac{2}{3}$ - jedoch nicht auf das größte Element im Zielbereich abgebildet wird. Daher vermuten wir, dass die Funktion nicht surjektiv ist. Tatsächlich ist

$$f^{-1}(\{1\}) = \emptyset,$$

sodass wir ein Gegenbeispiel gefunden haben.

Lösung zu Aufgabe 9
In beiden Fällen ist eine Gleichheit von Mengen zu zeigen, sodass wir jeweils die Teilmengeneigenschaften nachweisen:

a) Wir starten mit dem Nachweis von $f^{-1}(A\cup B) \subseteq f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$:

Sei $x \in f^{-1}(A\cup B)$ beliebig aber fest, so gilt:

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(A\cup B) & \Rightarrow & f(x) \in A \cup B \\ & \Rightarrow & f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ & \Rightarrow & x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ & \Rightarrow & x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) \end{array}$$

Alle Folgerungsschritte können wir von unten nach oben lesen und erhalten damit $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A\cup B)$:

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B) & \Rightarrow & x \in f^{-1}(A) \vee x \in f^{-1}(B) \\ & \Rightarrow & f(x) \in A \vee f(x) \in B \\ & \Rightarrow & f(x) \in A \cup B \\ & \Rightarrow & x \in f^{-1}(A\cup B) \end{array}$$

Damit ist die Gleichheit der Mengen bewiesen.

b) Analog gehen wir für die zweite Aussage vor. Zunächst zeigen wir $f^{-1}(A\backslash B) \subseteq f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B)$:
Sei $x \in f^{-1}(A\backslash B)$ beliebig aber fest. Dann gilt:

$$\begin{array}{rcl} x \in f^{-1}(A\backslash B) & \Rightarrow & f(x) \in A\backslash B \\ & \Rightarrow & f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \\ & \Rightarrow & x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \\ & \Rightarrow & x \in f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B) \end{array}$$

Ebenfalls analog zum letzten Beispiel können wir diese Folgerungen ohne Probleme von unten nach oben lesen und erhalten

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B) &\Rightarrow x \in f^{-1}(A) \wedge x \notin f^{-1}(B) \\ &\Rightarrow f(x) \in A \wedge f(x) \notin B \\ &\Rightarrow f(x) \in A\backslash B \\ &\Rightarrow x \in f^{-1}(A\backslash B), \end{aligned}$$

sodass auch $f^{-1}(A)\backslash f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(A\backslash B)$ gilt und insgesamt die Gleichheit der Mengen folgt.

Lösung zu Aufgabe 10

a) Für das Bild müssen wir alle Werte des Zielbereichs bestimmen, die von der Abbildung getroffen werden können. Theoretisch können wir an dieser Stelle mit Methoden der Differentialrechnung arbeiten, um das globale Minimum und Maximum zu bestimmen, wählen der Vollständigkeit halber jedoch einen anderen Weg. Zunächst erkennen wir, dass $x^2 \geq 0$ gilt, sodass $x^2 + 1 \geq 1$ folgt.

   Zusätzlich ist die Wurzelfunktion monoton, da für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq x < y$ mit Quadrieren

$$\begin{aligned} & \sqrt{x} < \sqrt{y} \\ \Leftrightarrow \quad & x < y \end{aligned}$$

   folgt. Daher ist $\sqrt{x^2+1} \geq \sqrt{1} = 1$. Da wir für $x = 0$ den Wert $\sqrt{1}$ erhalten, ist 1 unser globales Minimum. Auf der anderen Seite gilt

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty,$$

   sodass wir den Wertebereich $[1, \infty)$ erhalten.

   Für das Urbild $f^{-1}(A)$ erhalten wir mit obiger Überlegung, dass nur Werte größer oder gleich 1 mit dieser Abbildung „getroffen“ werden können, sodass wir direkt

$$f^{-1}(A) = \{1\}$$

   erhalten. Mit obiger Überlegung stimmt B mit dem Bild von f überein, sodass wir

$$f^{-1}(B) = \mathbb{R}$$

   schließen können.

b) Erneut betrachten wir eine stetige Funktion. Zusätzlich ist f in diesem Fall streng monoton fallend, da für $x, y \in [0, 1]$ mit $x < y$ folgt:

$$x < y \Leftrightarrow x+1 < y+1 \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} > \frac{1}{y+1}$$

   Damit erhalten wir unser Maximum an der Stelle $x = 0$ mit $f(0) = \frac{1}{1+x} = 1$ und das globale Minimum durch den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{1+x} = 0,$$

sodass wir als Bild von f die Menge $(0,1]$ erhalten.

Da die Menge A mit dem Bild von f übereinstimmt, erhalten wir

$$f^{-1}(A) = [0,\infty).$$

Da für alle $x \in B$ die Implikation $x > 1$ gilt, folgt

$$f^{-1}(B) = \emptyset.$$

Lösung zu Aufgabe 11

a) Wir führen die Induktion mit den bekannten drei Schritten durch:

- **Induktionsanfang:** $n = 1$
  Setzen wir $n = 1$ auf der linken Seite ein, so erhalten wir

  $$\sum_{k=1}^{1} k^2 = 1^2 = 1.$$

  Über die Formel der rechten Seite berechnen wir

  $$\frac{1\cdot(1+1)\cdot(2\cdot 1+1)}{6} = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} = 1 \quad \surd$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  Wir setzen auf der linken Seite als obere Grenze der Summe $n+1$ ein und ziehen im ersten Schritt den obersten Summanden aus der Summe heraus. Im Anschluss können wir die Induktionsvoraussetzung benutzen und erhalten damit

  $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= (n+1)^2 + \sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)^2 + \frac{n\cdot(n+1)\cdot(2n+1)}{6} \\ &= (n+1)\cdot\left(n+1+\frac{n\cdot(2n+1)}{6}\right) \\ &= (n+1)\cdot\frac{6n+6+2n^2+n}{6} \\ &= (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6}\end{aligned}$$

  Auf der rechten Seite erhalten wir durch Einsetzen von $n+1$ den Term

  $$\begin{aligned}\frac{(n+1)\cdot(n+2)\cdot(2(n+1)+1)}{6} &= (n+1)\cdot\frac{(n+2)\cdot(2n+3)}{6} \\ &= (n+1)\cdot\frac{2n^2+3n+4n+6}{6} \\ &= (n+1)\cdot\frac{2n^2+7n+6}{6}.\end{aligned}$$

Durch die Gleichheit haben wir die Behauptung per Induktion gezeigt.

b) Für die zweite Aussage gehen wir analog vor:

- **Induktionsanfang:** $n = 1$
  Auf der einen Seite erhalten wir
  $$\sum_{k=1}^{1} k \cdot 2^k = 1 \cdot 2^1 = 2$$
  und auf der anderen Seite berechnen wir
  $$(1-1) \cdot 2^2 + 2 = 0 + 2 = 2 \quad \surd$$
- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  Wir setzen erneut $n+1$ als oberes Ende der Summe ein und ziehen den letzten Summanden heraus, sodass wir für die verbleibende Summe die Induktionsvoraussetzung einsetzen können. Es gilt:
  $$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k \cdot 2^k &= (n+1) \cdot 2^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} k \cdot 2^k \\ &\overset{\text{I.V.}}{=} (n+1) \cdot 2^{n+1} + (n-1) \cdot 2^{n+1} + 2 \\ &= 2^{n+1} \cdot ((n+1) + (n-1)) + 2 \\ &= 2^{n+1} \cdot (2n) + 2 \\ &= 2^{n+2} \cdot n + 2 \\ &= n \cdot 2^{n+2} + 2 \quad \surd. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 12

a) Für die Teilbarkeitsaussage gehen wir weiterhin die gewohnten drei Schritte durch:

- **Induktionsanfang:** $n = 1$
  Für $n = 1$ erhalten wir die Zahl
  $$x = 11^{1+1} + 12^{2 \cdot 1 - 1} = 11^2 + 12 = 121 + 12 = 133,$$
  sodass die Teilbarkeit offensichtlich gilt $\surd$.
- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  Zuerst bilden wir die Zahl x mit $n+1$ statt mit der Zahl n. Im Anschluss müssen wir eine Struktur erkennen, die es uns erlaubt die Induktionsvoraussetzung einzusetzen. Zunächst bringen wir die Exponenten in die richtige Form:
  $$11^{n+2} + 12^{2 \cdot (n+1) - 1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 12^{2n+1} = 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1}$$
  Der Trick an dieser Stelle ist es, dass wir die Zahl 144 künstlich durch die Summe $11 + 133$ darstellen können. Unsere Absicht ist dabei, durch Ausklammern einen Term zu erhalten, für den wir die Induktionsvoraussetzung einsetzen können und einen Teil, der offensichtlich durch 133 teilbar ist. Es folgt:
  $$\begin{aligned} 11 \cdot 11^{n+1} + 144 \cdot 12^{2n-1} &= 11 \cdot 11^{n+1} + (11 + 133) \cdot 12^{2n-1} \\ &= 11 \cdot \left(11^{n+1} + 12^{2n-1}\right) + 133 \cdot 12^{2n-1}. \end{aligned}$$
  Aufgrund der Induktionsvoraussetzung ist der erste Summand durch 133 teilbar (damit haben wir die I.V. an dieser Stelle benutzt). Der zweite Summand ist ein ganzzahliges Vielfaches der Zahl 133 und damit ebenso durch 133 teilbar. Da beide Summanden durch 133 teilbar sind, ist auch die Summe durch 133 teilbar.

Damit haben wir die Behauptung per Induktion bewiesen.

b) Erneut gehen wir die drei Schritte der Induktion schrittweise durch:

- **Induktionsanfang:** $n = 2$ (Da in die Behauptung nur für $n \geq 2$ gelten soll)
  Setzen wir $n = 2$ auf der linken Seite ein, erhalten wir

$$0 < (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \Leftrightarrow 2ab < a^2 + b^2$$

  Damit gilt

$$2^{2-1} \cdot (a^2 + b^2) = = 2a^2 + 2b^2 = a^2 + b^2 + a^2 + b^2 > a^2 + n^2 + 2ab = (a+b)^2.$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  Betrachten wir den Fall $|a| > |b|$, dann ist $a^n > b^n$ und es folgt

$$0 < (a-b) \cdot (a^n - b^n) = a^{n+1} - a \cdot b^n - a^n \cdot b + b^{n+1} \Leftrightarrow a^{n+1} + b^{n+1} > a \cdot b^n + a^n \cdot b.$$

  Damit gilt im Induktionsschritt

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b) \cdot (a+b)^n \\
&< (a+b) \cdot 2^{n-1} \cdot \left(a^n + b^n\right) \\
&= 2^{n-1} \cdot \left(a^{n+1} + a \cdot b^n + a^n \cdot b + b^{n+1}\right) \\
&< 2^{n-1} \cdot \left(a^{n+1} + \left(a^{n+1} + b^{n+1}\right) + b^{n+1}\right) \\
&= 2^n \cdot \left(a^{n+1} + b^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

c) Für die letzte Induktion gilt:

- **Induktionsanfang:** $n = 1$
  In diesem Fall ist X eine Menge mit genau einem Element, so ist

$$\mathscr{P}(X) = \{\emptyset, X\}.$$

  Damit erhalten wir

$$|\mathscr{P}(X)| = 2 = 2^1 \quad \surd$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  In diesem Fall betrachten wir X als Menge mit $n+1$ Elementen. Bezeichne a ein Element von X, so können wir

$$X = (X \setminus \{a\}) \cup \{a\}$$

  setzen und erhalten mit $X \setminus \{a\}$ eine Menge mit n Elementen. Wenden wir auf diese die Induktionsvoraussetzung an, so erhalten wir

$$|\mathscr{P}(X \setminus \{a\})| = 2^n.$$

  Die Anzahl der Teilmengen der n „elementigen“ Menge beträgt daher 2^n. Nun können wir jeder dieser Mengen das Element a hinzufügen und erhalten 2^n neue Teilmengen von X. Insgesamt gilt daher

$$|\mathscr{P}(X)| = 2^n + 2^n = 2^{n+1}.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen.

Lösung zu Aufgabe 13

a) Für das Infimum gehen wir wie folgt vor: Wir wissen, dass A nach unten beschränkt ist, da wir durch die auftretenden Quadrate nie eine negative Zahl erhalten können. Es gilt für alle $a \in A$ daher $a \geq 0$. Da wir für $x = 0$ zusätzlich $\frac{0^2}{1+0^2} = 0$ erhalten, haben wir eine untere Grenze gefunden, die wieder in der Menge enthalten ist und daher ein Minimum ist. Das Minimum einer Menge ist automatisch ihr Infimum.

Für das Supremum stellen wir folgende Überlegung an: Für jede reelle Zahl x gilt $x^2 < 1 + x^2$, sodass

$$\frac{x^2}{1+x^2} < 1$$

folgt. Für größer werdendes x nähern wir uns dieser Grenze, sodass wir

$$\sup A = 1$$

vermuten. Dies beweisen wir nun: Sei $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben, so berechnen wir

$$\begin{aligned}
& \frac{x^2}{1+x^2} &>& \; 1-\varepsilon \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 &>& \; 1+x^2-\varepsilon\cdot(1+x^2) \\
\Leftrightarrow \quad & 0 &>& \; 1-\varepsilon\cdot(1+x^2) \\
\Leftrightarrow \quad & \varepsilon+\varepsilon\cdot x^2 &>& \; 1 \\
\Leftrightarrow \quad & x^2 &>& \; \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon} \\
\Leftrightarrow \quad & |x| &>& \; \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}
\end{aligned}$$

Da die Wurzel für $\varepsilon < 1$ wohldefiniert ist, finden wir zu jedem $0 < \varepsilon < 1$ ein Element, welches größer als $1-\varepsilon$ ist. Für $\varepsilon \geq 1$ ist bereits 0 ein solches Element. Daher ist 1 das Supremum der Menge A.

b) Zunächst schreiben wir die Elemente um, denn es gilt

$$\frac{1+n}{1+3n} = \frac{1+3n-2n}{1+3n} = 1 - \frac{2n}{1+3n} = 1 - \frac{2}{\frac{1}{n}+3}.$$

Damit hängt die Darstellung nur noch an einer Stelle von der Variablen n ab und wir erkennen direkt, dass die Werte für wachsendes n fallen (n wird größer $\rightarrow \frac{1}{n}$ wird kleiner $\rightarrow$ der Bruch wird größer und da wir ihn von 1 abziehen wir der gesamte Wert wieder kleiner). Daher erhalten wir das Maximum durch $n = 1$ und es ist

$$\sup B = \max B = 1 - \frac{2}{1+3} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Für das Inifmum überlegen wir uns aufgrund der Monotonie, dass der Grenzwert $n \rightarrow \infty$ das Infimum wird. Daher stellen wir die Vermutung auf, dass

$$\inf B = 1 - \frac{2}{0+3} = \frac{1}{3}$$

gilt. Diese Vermutung beweisen wir nun. Sei $\varepsilon > 0$ und wir berechnen

$$\begin{aligned} \frac{1+n}{1+3n} &< \frac{1}{3}+\varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad 1+n &< \frac{1}{3}+n+\varepsilon+3n\cdot\varepsilon \\ \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{2}{3}-\varepsilon}{\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

Wir finden zu jedem $0 < \varepsilon < \dfrac{2}{3}$ ein n mit

$$n > \frac{\frac{2}{3}-\varepsilon}{\varepsilon},$$

sodass $\dfrac{1}{3}+\varepsilon$ keine untere Schranke mehr ist. Für $\varepsilon > \dfrac{2}{3}$ ist $\dfrac{1}{3}+\varepsilon$ bereits größer als das Supremum und damit keine untere Schranke mehr. Insgesamt folgt somit, dass $\frac{1}{3}$ das Infimum ist, wenn es eine untere Schranke ist. Es gilt:

$$\frac{1}{3} < \frac{1+n}{1+3n} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3}+n < 1+n \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{3} < 1 \;\checkmark.$$

Lösung zu Aufgabe 14

Wir starten mit $\sqrt{2}$, obwohl der Fall $\sqrt{p}$ diesen impliziert. Wir stellen die Vermutung auf, dass es sich bei $\sqrt{2}$ um eine rationale Zahl handelt und führen diese zu einem Widerspruch. Wäre $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl, so würden teilerfremde $a, b \in \mathbb{Z}$ existieren, sodass

$$\frac{a}{b} = \sqrt{2}$$

gilt. Da beide Seiten positiv sind, können wir äquivalent die Quadrate

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

betrachten. Damit folgt, dass $a^2 = 2\cdot b^2$ gilt und a^2 durch 2 teilbar ist. Betrachten wir im Anschluss das Quadrat einer geraden und einer ungeraden Zahl

$$(2k)^2 = 4k^2 = 2\cdot(2k^2) \quad \text{und} \quad (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2\cdot(2k^2+2k)+1,$$

erkennen wir, dass nur das Quadrat einer geraden Zahl wieder gerade ist. Daher ist nicht nur a^2 durch 2 teilbar, sondern auch a. Wenn a durch 2 teilbar ist, ist a^2 hingegen durch 4 teilbar und wir finden ein $c \in \mathbb{Z}$, sodass $a^2 = 4\cdot c$ gilt. Damit erhalten wir jedoch, dass

$$2\cdot b^2 = a^2 = 4\cdot c \;\Leftrightarrow\; b^2 = 2\cdot c$$

gilt, sodass b^2 und damit b durch 2 teilbar ist. Dies ist ein Widerspruch zur Teilerfremdheit der ganzen Zahlen a und b, sodass unsere Vermutung, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist, falsch war.

Im Fall $\sqrt{p}$ für eine Primzahl p gehen wir analog vor. Angenommen, es handele sich bei $\sqrt{p}$ um eine rationale Zahl, so finden wir zwei teilerfremde Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ mit

$$\frac{a}{b} = \sqrt{p}.$$

Durch Quadrieren erhalten wir erneut die Beziehung

$$a^2 = p \cdot b^2,$$

sodass a^2 durch p teilbar ist. Wenn wir nun zeigen können, dass mit a^2 bereits auch a durch p teilbar ist, schlussfolgern wir den Widerspruch wie im Fall von $\sqrt{2}$.

Für die Zahl a sei die Primzahlzerlegung

$$a = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}$$

mit Primzahlen p_i und Vielfachheiten r_i gegeben. Nehmen wir nun an, dass a nicht durch p teilbar ist, so gilt, da p selbst eine Primzahl ist, für alle $i = 1, \ldots, n$ die Ungleichung $p_i \neq p$. Damit wäre aber

$$a^2 = \left(p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{r_n}\right)^2 = p_1^{2r_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{2r_n}$$

ebenfalls nicht durch p teilbar, da sich zwar die Vielfachheiten ändern, aber durch das Quadrieren die Primfaktoren gleich bleiben. Daher muss a ebenfalls bereits durch p teilbar sein und wir erhalten analog den Widerspruch, sodass $\sqrt{p}$ keine rationale Zahl ist.

Lösung zu Aufgabe 15

a) Für die Abgeschlossenheit zeigen wir, dass der Abschluss von A gleich A ist: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $a_n \in A$ und Grenzwert $a \in \overline{A}$, dann gilt, dass sich entweder unendlich viele Elemente der Folge im Intervall $[0, 1]$ befinden oder falls dies nicht der Fall ist, sich unendlich viele Folgeglieder im Intervall $[2, 3]$ befinden. Da beide Intervalle abgeschlossen sind, ist der Grenzwert a also entweder im Intervall $[0, 1]$ oder im Intervall $[2, 3]$ enthalten, sodass $a \in A$ gilt. Da die Folge (a_n) beliebig gewählt war, folgt $\overline{A} = A$ und die Abgeschlossenheit.

   Wir vermuten, dass A nicht offen ist, sodass wir nach einem geeigneten Gegenbeispiel suchen:

   Beispielsweise existiert für den Wert $0 \in A$ kein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(0) \subseteq A$ gilt. Dies folgt aus der Tatsache, dass für jedes $\varepsilon > 0$

$$-\frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(0)$$

   gilt, aber $-\frac{\varepsilon}{2} \notin A$. Damit ist A nicht offen.

b) Die Menge B ist nicht abgeschlossen, da sie zwar alle Elemente der Folge mit der expliziten Darstellung $a_n = \frac{1}{n}$ enthält, den Grenzwert 0 aber nicht.

   Sie ist ebenfalls nicht offen, da beispielsweise für jedes $\varepsilon > 0$ die Umgebung $U_\varepsilon(1) \not\subseteq B$ ist.

c) Aus den gleichen Gründen wie bei der Menge B ist die Menge C nicht offen.

   Nun betrachten wir jedoch die Menge, die zusätzlich den Grenzwert der Folge mit der expliziten Darstellung $a_n = \frac{1}{n}$ besitzt. Mit der Definition der Abgeschlossenheit, dass der Abschluss $\overline{C}$ der Menge C entspricht, und damit für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes Element $c \in C$ die Aussage

$$U_\varepsilon(c) \cap C \neq \emptyset$$

gilt, folgt, dass die Menge C genau dann abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement offen ist. Das Komplement der Menge C können wir darstellen als:

$$\mathbb{R}\backslash C =]-\infty, 0[\cup]1, \infty[\cup \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}[$$

Das Komplement besteht aus abzählbar vielen Vereinigungen von offenen Mengen. Für jeden Punkt $x \in \mathbb{R}\backslash C$ können wir eindeutig eine dieser Mengen finden, sodass x in dieser Menge enthalten ist. Daher existiert für dieses x ein $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x)$ ganz in dieser Menge enthalten ist - denn sie ist offen. Daher ist auch $\mathbb{R}\backslash C$ offen und letztlich C abgeschlossen.

d) Zunächst vereinfachen wir

$$D = [0,5] \cap \Big( ]0,1[\cup]3,4[\Big) =]0,1[\cup]3,4[.$$

D lässt sich durch die Vereinigung zweier offener Mengen bilden und ist nach der gleichen Begründung wie C damit offen.

D ist nicht abgeschlossen, denn für den Wert $0 \notin D$ finden wir kein $\varepsilon > 0$, sodass

$$U_\varepsilon(0) \cap D = \emptyset,$$

da

$$\frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(0) \quad \text{und} \quad \frac{\varepsilon}{2} \in D$$

gilt. Wir haben mit 0 einen Berührpunkt von D gefunden, der nicht in der Menge enthalten ist.

Lösung zu Aufgabe 16

a) Zunächst vereinfachen wir

$$A = [-1,1] \cup [0,3] = [-1,3].$$

Mit Aufgabe 15 folgt, dass A abgeschlossen ist, sodass

$$\overline{A} = A.$$

Da $]-1,3[$ offen ist, genügt es, die Punkte $x = -1$ und $x = 3$ zu betrachten. Zu beiden finden wir jedoch kein $\varepsilon > 0$, sodass

$$U_\varepsilon(x) \subseteq A$$

gilt, sodass wir das Innere

$$A^\circ =]-1,3[$$

erhalten.

Mit Hilfe des Abschlusses und des Inneren erhalten wir den Rand ∂A durch

$$\partial A = \overline{A}\backslash A^\circ = \{1,3\}.$$

b) Wir haben in Aufgabe 15 gesehen, dass die Menge B weder offen noch abgeschlossen ist. Für den Abschluss erhalten wir nach Aufgabe 15

$$\overline{B} = B \cup \{0\},$$

da 0 ein Berührpunkt der Menge ist und die Menge $B \cup \{0\}$ abgeschlossen ist.

Wir für beliebiges $x \in B$ kein $\varepsilon > 0$ finden, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq B$ gilt, da zwischen in der Umgebung der rationalen Zahl x irrationale Zahlen enthalten sind. Allerdings ist keine irrationale Zahl in der Menge B enthalten, sodass

$$B^\circ = \emptyset.$$

Damit erhalten wir den Rand ∂B durch

$$\partial B = \overline{B} \backslash B^\circ = B \cup \{0\}.$$

c) Zunächst vereinfachen wir

$$[0, 5] \cap]1, 4] =]1, 4].$$

Da die Menge $]1, 4[$ offen ist, betrachten wir den Punkt $x = 4$. Jedoch finden wir kein $\epsilon > 0$, sodass

$$U_\varepsilon(4) \subseteq C$$

gilt, da

$$4 + \frac{\varepsilon}{2} \in U_\varepsilon(C) \quad \text{und} \quad 0 < 4 + \frac{\varepsilon}{2} \notin C$$

gilt. Damit erhalten wir

$$C^\circ =]1, 4[.$$

Die Menge C ist nicht abgeschlossen, da wir kein $\varepsilon > 0$ finden, sodass

$$U_\varepsilon(1) \cap C \neq \emptyset$$

gilt. Daher ist 1 ein Berührpunkt der Menge C. Fügen wir 1 hinzu erhalten wir die Menge $[1, 4]$, welche abgeschlossen ist, sodass

$$\overline{C} = [1, 4].$$

Den Rand ∂C erhalten wir erneut durch

$$\partial C = \overline{C} \backslash C^\circ = \{1, 4\}.$$

1.2 zu Folgen und die reellen Zahlen

Lösung zu Aufgabe 17

Die hier präsentierte Lösung ist nicht eindeutig, da beliebig viele Darstellungen bei wenig bekannten Folgegliedern existieren.

a) In diesem Fall erkennen wir, dass der Unterschied der aufeinanderfolgenden Zahlen jeweils 3 beträgt, sodass wir einen Zusammenhang mit $3k$ vermuten. Da das erste Folgeglied 1 ist, vermuten wir die Darstellung $a_k = 3 \cdot k - 2$ und erkennen, dass dies für die aufgeführten Folgeglieder korrekt ist.

b) In diesem Beispiel erkennen wir, dass bei jedem Folgeglied eine Verdopplung des Vorgängers geschieht, sodass wir 2^k betrachten. Da das erste Folgeglied 3 ist, vermuten wir $a_k = 2^k + 2$ und sehen, dass alle Folgeglieder damit korrekt gebildet werden können.

c) Zunächst erkennen wir einen Vorzeichenwechsel, sodass wir $(-1)^{k+1}$ betrachten. Die +1 im Exponenten bilden wir, da das erste Folgeglied positiv ist. Zudem erkennen wir Brüche die schrittweise kleiner werden, sodass wir dies mit $\frac{1}{k}$ verknüpfen. Insgesamt vermuten wir die Vorschrift $a_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ und erkennen, dass die obigen Folgeglieder damit gebildet werden können.

Lösung zu Aufgabe 18

Ebenfalls ist die folgende Lösung nicht eindeutig und es existieren unendlich viele rekursive Darstellungen.

a) Wir erkennen einen gleichbleibenden Unterschied von 3, sodass wir $a_{k+1} = a_k + 3$ mit $a_1 = 1$ vermuten. Alle obigen Folgeglieder können damit berechnet werden.

b) In diesem Fall erkennen wir, dass wir jedes Folgeglied durch Verdoppeln und anschließender Addition von 1 erhalten. Daher vermuten wir, dass $a_{k+1} = 2 \cdot a_k + 1$ mit $a_1 = 1$ gilt und sehen, dass wir jedes der obigen Folgeglieder auf diese Weise berechnen können.

Lösung zu Aufgabe 19

a) Um die Konvergenz der Folge (a_n) zu zeigen, benötigen wir eine Vermutung über den Grenzwert a In diesem Fall vermuten wir $a = 0$, da n^2 für n gegen unendlich beliebig groß wird. Sei $\varepsilon > 0$ und wir betrachten

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2}.$$

In einer Nebenrechnung berechnen wir

$$\frac{1}{\tilde{n}^2} = \varepsilon \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\varepsilon} = \tilde{n}^2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} = \tilde{n}.$$

Danit finden wir für jedes $\varepsilon > 0$ ein n_0 durch

$$n_0 = \lceil \tilde{n} \rceil = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil,$$

sodass für alle $n \geq n_0$ folgt:

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{n^2} - 0\right| = \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n_0} \leq \frac{1}{\tilde{n}} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)} = \varepsilon$$

Damit konvergiert die Folge (a_n) gegen den Grenzwert $a = 0$.

b) Für diese Folge vermuten wir den Grenzwert $a = 1$ und erhalten

$$|a_n - a| = \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| = \left|-\frac{1}{n+1}\right| = \frac{1}{n+1}.$$

In einer Nebenrechnung berechnen wir

$$\frac{1}{\tilde{n}+1} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < \tilde{n}.$$

Damit finden wir für alle $\varepsilon > 0$ ein n_0 durch

$$n_0 = \lceil \tilde{n} \rceil = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil,$$

sodass für alle $n \geq n_0$ folgt:

$$|a_n - a| = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \frac{1}{\tilde{n}+1} = \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon} - 1 + 1} = \varepsilon.$$

Insgesamt konvergiert die Folge (a_n) daher gegen $a = 1$.

Lösung zu Aufgabe 20

a) In diesem Fall kürzen wir mit dem am schnellsten wachsenden Terms des Nenners und erhalten mit den Grenzwertsätzen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3 - 3n + 5}{7n - 2n^3 + 1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^3 \cdot \left(2 - \frac{3n}{n^3} + \frac{5}{n^3}\right)}{n^3 \cdot \left(\frac{7n}{n^3} - 1 + \frac{1}{n^3}\right)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{3}{n^2} + \frac{5}{n^3}}{\frac{7}{n^2} - 1 + \frac{1}{n^3}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{5}{n^3}}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{7}{n^2} - \lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^3}} = \frac{2 - 0 + 0}{0 - 1 + 0} \\
&= -2.
\end{aligned}$$

b) In diesem Beispiel schätzen wir nach unten ab und erhalten

$$\frac{2n^3 - n + 1}{n + n + 1 + n} = \frac{2n^3 - n + 1}{3n + 1} \geq \frac{2n^3 - n}{3n + 3n} \geq \frac{2n^3 - 6n}{6n} = \frac{1}{3}n^2 - 1.$$

Wir sehen, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{3}n^2 - 1 = \infty$ ist, sodass die Folge (a_n) ebenso bestimmt gegen ∞ divergieren muss.

c) Bei diesem Beispiel kürzen wir erneut mit dem am schnellsten wachsenden Term des Nenners und wenden die Grenzwertsätze an. Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{n^9-1}{2^n+n^3+n+1} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n \cdot \left(\frac{n^9}{2^n} - \frac{1}{2^n}\right)}{2^n \cdot \left(1 + \frac{n^3}{2^n} + \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}\right)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^9}{2^n} - \frac{1}{2^n}}{1 + \frac{n^3}{2^n} + \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}} \\
&= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^9}{2^n} - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{2^n} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} + \frac{1}{2^n}} \\
&= \frac{0-0}{1+0+0+0} \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

d) Diese Aufgabe lösen wir auf die klassische im Heft vorgestellte Weise mit Hilfe des Sandwich-Lemmas. Es gilt:

$$7 = \sqrt[n]{7^n} \le \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} \le \sqrt[n]{7^n+7^n+7^n} = \sqrt[n]{3} \cdot 7$$

Da $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$ ist, können wir die Folge von oben und unten mit Folgen eingrenzen (unten mit der Konstanten Folge 7), die beide gegen den gleichen Grenzwert konvergieren, sodass die Folge ebenfalls diesen Grenzwert besitzt und so folgt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n+5^n+7^n} = 7.$$

e) Die Vorschrift dieser Folge zeichnet sich durch die Differenz zweier Wurzeln aus, sodass wir mit der Summe erweitern und mit Hilfe der dritten binomischen Formel

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sqrt{n^4+2n^2} - \sqrt{n^4+n} \\
&= \sqrt{n^4+2n^2} - \sqrt{n^4+n} \cdot \frac{\sqrt{n^4+2n^2} + \sqrt{n^4+n}}{\sqrt{n^4+2n^2} + \sqrt{n^4+n}} \\
&= \frac{\sqrt{n^4+2n^2}^2 - \sqrt{n^4+n}^2}{\sqrt{n^4+2n^2} + \sqrt{n^4+n}} \\
&= \frac{n^4+2n^2-n^4-n}{\sqrt{n^4+2n^2} + \sqrt{n^4+n}} \\
&= \frac{2n^2-n}{\sqrt{n^4+2n^2} + \sqrt{n^4+n}}
\end{aligned}
$$

erhalten. Für diesen Bruch gehen wir nun wie in den Aufgabenteilen 1., 2. und 3. vor und kürzen mit dem am schnellsten wachsenden Term des Nenners. An dieser Stelle ist der am schnellsten wachsende Term nicht n^4, da wir die Wurzel beachten müssen, sodass wir mit

$n^2 = \sqrt{n^4}$ kürzen. Damit folgt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2n^2 - n}{\sqrt{n^4 + 2n^2} + \sqrt{n^4 + n}} \\ &= \frac{n^2 \cdot \left(2 - \frac{n}{n^2}\right)}{n^2 \cdot \left(\sqrt{1 + \frac{2n^2}{n^4}} + \sqrt{1 + \frac{n}{n^4}}\right)} \\ &= \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}}. \end{aligned}$$

Abschließend erhalten wir den Grenzwert der Folge mit Hilfe der Grenzwertsätze durch

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2 - \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{2}{n^2}} + \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^3}}} = \frac{2 - 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0}} \\ &= 1. \end{aligned}$$

f) Bei diesem Bruch kürzen wir erneut mit dem am schnellsten wachsenden Term des Nenners. Dieser ist 5^{n-1}, doch vor dem Kürzen schreiben wir die Folge der Einfachheit halber um:

$$a_n = \frac{4^n + 5 \cdot 5^n}{2 \cdot 5^{n-1} + 2^n} = \frac{5^{n-1} \cdot \left(\frac{4^n}{5^n} + 5 \cdot 5\right)}{5^{n-1} \cdot \left(2 \cdot 1 + \frac{2^n}{5^n}\right)} = \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 25}{2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n}$$

Mit den Grenzwertsätzen und der geometrischen Folge erhalten wir

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{4}{5}\right)^n + 25}{2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n + \lim\limits_{n\to\infty} 25}{\lim\limits_{n\to\infty} 2 + \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{0 + 25}{2 + 0} = 12{,}5$$

Lösung zu Aufgabe 21

a) Wir untersuchen die Folge (a_n) auf Monotonie und Beschränktheit. Um ein Gefühl für die Folge zu bekommen, berechnen wir die ersten Folgeglieder:

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = 2 \cdot \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{15}{32}, \quad a_3 = 2 \cdot \frac{15}{32} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{15}{32}\right)^2 = \frac{1695}{2048}$$

Die Brüche werden schnell „unschön“, jedoch erkennen wir, dass die Folge monoton wächst. An dieser Stelle lohnt es sich in einer Nebenrechnung den Satz der monotonen Konvergenz als erfüllt anzusehen, um die richtigen Vermutungen treffen zu können. Wir gehen davon aus, dass die Folge (a_n) gegen einen Grenzwert a konvergiert und können daher die folgende

Rechnung durchführen:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty} 2\cdot a_n - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\cdot a_n^2 \\
\Leftrightarrow \qquad a &= 2\cdot a - \frac{1}{2}\cdot a^2 \\
\Leftrightarrow \qquad 2a &= 4a - a^2 \\
\Leftrightarrow \qquad 0 &= 2a - a^2 \\
\Leftrightarrow \qquad 0 &= a\cdot(2-a).
\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass als mögliche Grenzwerte nur die Werte $a = 0$ und $a = 2$ in Frage kommen. Da unser Startwert $a_1 = \frac{1}{4}$ ist und wir bereits vermutet haben, dass die Folge monoton wachsend ist, ist $a = 2$ unser Kandidat.

Mit dieser Vorüberlegung vermuten wir, dass $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und beweisen diese Aussage per vollständiger Induktion:

- **Induktionsanfang:** $n = 1$
  Für $n = 1$ erhalten wir :
  $$a_1 = \frac{1}{4} \leq 2 \;\checkmark$$
- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  Mit quadratischer Ergänzung erhalten wir:
  $$\begin{aligned}
  a_{n+1} &= 2\cdot a_n - \frac{1}{2}\cdot a_n^2 \\
  &= -\frac{1}{2}\cdot\left(a_n^2 - 4\cdot a_n\right) \\
  &= -\frac{1}{2}\cdot\left(a_n^2 - 4\cdot a_n + 4 - 4\right) \\
  &= 2 - \frac{1}{2}\cdot(a_n-2)^2
  \end{aligned}$$
  An dieser Stelle erhalten wir einen Sonderfall, denn die letzte Aussage ist eine wahre Aussage, die ohne die Induktionsvoraussetzung gültig ist. $(a_n - 2)^2$ ist für jeden Wert a_n positiv, sodass wir etwas von 2 subtrahieren und das Ergebnis daher kleiner gleich 2 ist. Dies bedeutet, dass alle Folgeglieder, die mit Hilfe der obigen Bildungsvorschrift der Folge gebildet werden, unsere Behauptung erfüllen. Mit Hilfe der Induktion stellen wir sicher, dass die Behauptung ebenso für den Startwert a_1 gilt. (An dieser Stelle wäre eine Induktion also nicht zwingend notwendig gewesen.)

Es bleibt der Nachweis der Monotonie. Diese können wir ebenfalls direkt ohne Induktion beweisen. Durch die gezeigte Beschränktheit $a_n \leq 2$ erhalten wir:

$$a_{n+1} - a_n = 2\cdot a_n - \frac{1}{2}\cdot a_n^2 - a_n = a_n - \frac{1}{2}\cdot a_n^2 = a_n\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot a_n\right) \geq a_n\cdot\left(1-\frac{1}{2}\cdot 2\right) = 0$$

Damit ist die Folge monoton wachsend und nach oben beschränkt. Wir dürfen nun den Satz der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten das Ergebnis vom Beginn der Aufgabe. Da $a = 0$ und $a = 2$ als Grenzwerte in Frage kommen, erhalten wir mit $a = 2$ die Lösung, da die Folge monoton wächst und bereits bei $a_1 = \frac{1}{4}$ beginnt.

b) Bei dieser Folge betrachten wir erneut die ersten Folgeglieder. Es gilt

- $a_1 = \frac{1}{4}$

- $a_2 = \dfrac{\frac{1}{4}}{2 \cdot \frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2}$

- $a_3 = \dfrac{-\frac{1}{2}}{2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 1} = \frac{1}{4}$

Die Folge ist daher nicht monoton. Wir sehen zudem, dass die Folge zwischen den Werten $\frac{1}{4}$ und $-\frac{1}{2}$ wechselt, sodass sie unbestimmt divergent ist.

Lösung zu Aufgabe 22
Wir werden zeigen, dass die Folge (a_n) mit dieser Bedingung eine Cauchy-Folge ist. Dazu benutzen wir die geometrische Summenformel.

Zunächst beweisen wir für $k \in \mathbb{N}$ induktiv:

$$|a_{n+1} - a_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |a_2 - a_1|$$

- **Induktionsanfang:** $n = 1$
  Wir sehen direkt:

$$|a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot |a_2 - a_1| \ \checkmark$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  Wir wenden zunächst einmal die Eigenschaft aus der Aufgabenstellung an sowie im Anschluss die Induktionsvoraussetzung und erhalten:

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq \frac{1}{2} \cdot |a_{n+1} - a_n| \overset{\text{I.V.}}{\leq} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot |a_2 - a_1| = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot |a_2 - a_1| \ \checkmark$$

Aus der Definition der Cauchy-Folge müssen wir eine Aussage über $|a_m - a_n|$ treffen. Diese schreiben wir im Folgenden durch eine zusätzliche natürliche Zahl $k \in \mathbb{N}$ durch $|a_{n+k} - a_n|$. Nun addieren wir alle fehlenden Folgeglieder zwischen a_{n+k}und a_n und ziehen sie wieder ab, sodass wir die gerade bewiesene Eigenschaft benutzen können. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|a_{n+k} - a_n| &= \left| a_{n+k} \underbrace{- a_{n+k-1} + a_{n+k-1}}_{=0} - \ldots \overbrace{- a_{n+1} + a_{n+1}}^{=0} - a_n \right| \\
&\leq |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \ldots + |a_{n+1} - a_n| \\
&= \sum_{j=0}^{k-1} |a_{n+1+j} - a_{n+j}| \\
&\leq \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1+j} \cdot |a_2 - a_1| \\
&= |a_2 - a_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \\
&\leq |a_2 - a_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \\
&= |a_2 - a_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} \\
&= |a_2 - a_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \\
&= 4 \cdot |a_2 - a_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n}
\end{aligned}$$

Aufgrund der Konvergenz der geometrischen Folge finden wir zu jedem $\varepsilon > 0$ ein n_0, sodass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n > n_0$ die Ungleichung

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n} < \varepsilon$$

gilt. Damit erhalten wir für $m > n$

$$|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| \leq 4 \cdot |a_2 - a_1| \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \leq \overbrace{4 \cdot |a_2 - a_1|}^{= c \in \mathbb{R}} \cdot \varepsilon.$$

Da der Faktor vor dem ε eine Konstante ist und wir für $m < n$ die Rollen von m und n tauschen können, ist (a_n) eine Cauchy-Folge und damit konvergent.

Lösung zu Aufgabe 23

a) Mit den Abschätzungen

$$-\frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$$

folgt aus dem Sandwich Lemma, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = 0$$

gilt. Eine konvergente Folge besitzt nur einen Häufungspunkt, nämlich ihren Grenzwert. Daher ist

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = 0.$$

b) Rekapitulieren wir, dass

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

gilt. Im Folgenden stellen wir die Vorschrift der Folge (a_n) etwas um, damit wir obige Konvergenz benutzen können. Wir erhalten

$$a_n = \left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)^{3n} = \left(\left(1+\frac{(-1)^n}{2n}\right)^{2n}\right)^{\frac{3}{2}},$$

sodass im Exponent so wie im Nenner in der Klammer der gleiche Wert $2n$ steht.

Betrachten wir nun aufgrund von $(-1)^n$ die beiden Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}), so ergibt sich

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} a_{2k} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{(-1)^{2k}}{4k}\right)^{4k}\right)^{\frac{3}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{4k}\right)^{4k}\right)^{\frac{3}{2}} &= e^{\frac{3}{2}}\\
\lim_{n\to\infty} a_{2k+1} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{(-1)^{2k+1}}{4k+2}\right)^{4k+2}\right)^{\frac{3}{2}} &= \lim_{n\to\infty} \left(\left(1-\frac{1}{4k+2}\right)^{4k+2}\right)^{\frac{3}{2}} &= \left(e^{-1}\right)^{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Einen weiteren Häufungspunkt kann die Folge (a_n) nicht besitzen, da jede Teilfolge von konvergenten Folgen (also von (a_{2k}) und (a_{2k+1})) wieder gegen den gleichen Grenzwert konvergieren. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} a_n &= e^{\frac{3}{2}}\\
\liminf_{n\to\infty} a_n &= e^{-\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 24
Das Ergebnis haben wir in der letzten Aufgabe mathematisch ungenauer benutzt und behauptet, dass keine weiteren Häufungspunkte der Folge existieren können. Dies beweisen wir an dieser Stelle.

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie genau einen Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$ besitzt. Daher bezeichnen wir

$$\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} a_{2n+1} = a$$

und zeigen, dass für die Menge aller Häufungspunkte HP die Gleichheit

$$H = \{a\}$$

gilt. Prinzipiell handelt es sich um die Gleichheit von zwei Mengen, sodass wir die beiden Teilmengeneigenschaften zeigen:

Da (a_{2n}) und (a_{2n+1}) jeweils konvergente Teilfolgen von (a_n) sind, ist ihr Grenzwert automatisch in H enthalten, sodass

$$\{a\} \subseteq HP$$

gilt.

Auf der anderen Seite zeigen wir für jeden weiteren Häufungspunkt $b \in HP$, dass $b = a$ gelten muss. Da b ein Häufungspunkt der Folge (a_n) ist, existiert eine Teilfolge (a_{n_k}), sodass

$$\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = b$$

gilt.

Angenommen unendlich viele Folgeglieder von a_{n_k} sind gerade, dann existiert eine Teilfolge der Teilfolge $(a_{n_{k_r}})$ die aus diesen geraden Elementen besteht. Damit ist $(a_{n_{k_r}})$ aber auch eine Teilfolge von (a_{2n}). Da (a_{2n}) konvergiert, konvergiert jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert und somit folgt $b = a$.

Sind nur endlich viele Elemente von (a_{n_k}) gerade, so müssen unendlich viele ungerade Elemente existieren, sodass wiederum eine Teilfolge $(a_{n_{k_r}})$ dieser Teilfolge existiert, die nur aus diesen ungeraden Elementen besteht. Damit ist $(a_{n_{k_r}})$ aber auch eine Teilfolge von (a_{2n+1}). Da (a_{2n+1}) konvergiert, konvergiert jede Teilfolge gegen den gleichen Grenzwert und daher ist $b = a$.

Da keine weitere Möglichkeit existiert, kann (a_n) nur den Häufungspunkt a besitzen und konvergiert gegen a.

Lösung zu Aufgabe 25

Wir zeigen, dass für alle $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, m > n_0$ der Abstand $|a_n - a_m|$ kleiner ε ist. Dazu betrachten wir zunächst den Abstand der Folgeglieder. Sei ohne Beschränkung $m > n$, so können wir die Betragsstriche weglassen. Ist dies nicht der Fall können wir die Reihenfolge von n und m in $|a_n - a_m|$ tauschen. Damit folgt:

$$|a_n - a_m| = \left|\frac{1}{n^2} - \frac{1}{m^2}\right| = \left|\frac{m^2 - n^2}{n^2 \cdot m^2}\right| = \frac{m^2 - n^2}{m^2 \cdot n^2} \leq \frac{m^2}{m^2 \cdot n^2} = \frac{1}{n^2}$$

In einer Nebenrechnung bestimmen wir nun für $\varepsilon > 0$:

$$\frac{1}{\tilde{n}^2} < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\varepsilon} < \tilde{n}^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < \tilde{n}$$

Wir wählen unser n_0 daher als

$$n_0 = \lceil \tilde{n} \rceil = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$$

und erhalten für alle $n, m > n_0$:

$$|a_n - a_m| \leq \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n_0^2} < \frac{1}{\tilde{n}^2} = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)^2} = \varepsilon$$

Damit ist (a_n) eine Cauchy-Folge.

1.3 zu Reihen und die eulersche Zahl

Lösung zu Aufgabe 26

a) Die erste Summe berechnen wir über die Anzahl der Summanden multipliziert mit der Summationsvorschrift, da diese nicht vom Summationsindex abhängt. Die Anzahl der Summanden erhalten wir über die Formel

$$\text{obere Grenze} \;-\; \text{untere Grenze} \;+\; 1.$$

Damit ergibt sich:

$$\sum_{k=0}^{11} 3 \;=\; (11-0+1)\cdot 3 \;=\; 36.$$

b) Bei diesem Beispiel wenden wir die Linearität der Summe an und die Regel des kleinen Gauß. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{25} 3k-1 &= 3\cdot\sum_{k=0}^{25} k-\sum_{k=0}^{25} 1\\ &= 3\cdot\frac{25\cdot 26}{2}-(25-0+1)\cdot 1\\ &= 975-26\\ &= 949.\end{aligned}$$

c) Diese Aufgabe lösen wir mit Hilfe er geometrischen Summenformel mit $q=3$. Wir erhalten

$$\sum_{k=0}^{10} 3^k \;=\; \frac{3^{11}-1}{3-1} \;=\; \frac{177147-1}{2} = 88537.$$

d) Bei der letzten Aufgabe liegt ebenfalls eine geometrische Summenformel vor. Um die geschlossene Formel anwenden zu können, benutzen wir zunächst einen Index-Shift um 2 nach unten. Insgesamt gilt:

$$\sum_{k=2}^{6}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \sum_{k=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} \;=\; \frac{1}{4}\cdot\sum_{k=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k \;=\; \frac{1}{4}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^5}{1-\frac{1}{2}} \;=\; \frac{31}{64}.$$

Lösung zu Aufgabe 27
Bei dieser Aufgabe rufen wir uns ins Gedächtnis, dass das Berechnen von unendlichen Summen in der Regel schwierig und komplex ist. Jeder der folgenden Reihen wird daher entweder auf der geometrischen Reihe oder Teleskopreihen basieren.

a) Zunächst stellen wir die Reihe mit bekannten Rechenregeln wie der Linearität und Potenzgesetzen um, sodass wir zwei geometrische Reihen erhalten. Dies kommt einer Umordnung gleich, da die geometrische Reihe jedoch absolut konvergiert, ist es legitim. Insgesamt erhalten wir:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1} &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\frac{2}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2k}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\frac{2}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^k\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k-\frac{2}{3}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{9}\right)^k\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{4}}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{4}{9}}\\ &= \frac{4}{3}-\frac{6}{5}\\ &= \frac{2}{15}\end{aligned}$$

b) Diese Reihe bringen wir entweder mit Partialbruchzerlegung oder mit Hilfe des im Heft gezeigten Tricks in die Form, dass wir die Teleskopreihe erkennen.

Mit Trick:

- Wir zeihen die beiden Faktoren des Nenners voneinander ab:

$$(k+3)-(k+1) = 2$$

- Wir korrigieren den Wert 2 durch den Vorfaktor $\frac{1}{2}$ und erhalten

$$\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(k+3)-(k+1)}{(k+3)\cdot(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+3}\right)$$

Mit Partialbruchzerlegung:

- Zunächst stellen wir die Bedingung nach den Regeln der Partialbruchzerlegung auf. Wir suchen $A, B \in \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)} = \frac{A}{k+1}+\frac{B}{k+3} = \frac{A\cdot(k+3)+B\cdot(k+1)}{(k+1)\cdot(k+3)} = \frac{(A+B)\cdot k+(3A+B)}{(k+1)\cdot(k+3)}$$

  gilt.
- Im Anschluss führen wir einen Koeffizientenvergleich durch. Im Zähler auf der linken Seite ist kein k enthalten, sodass der Vorfaktor 0 sein muss und der Wert ohne k ist 1. Damit lösen wir:

$$\begin{aligned} A + B &= 0\\ 3A + B &= 1\end{aligned}$$

Ziehen wir die erste von der zweiten Zeile ab, erhalten wir

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ 2A & & & = & 1 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile folgt $A = \frac{1}{2}$. Setzen wir dies in die erste Zeile ein, so ergibt sich $B = -\frac{1}{2}$. Insgesamt kommen wir zum gleichen Ergebnis wie durch den Trick:

$$\frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)} = \frac{A}{k+1} + \frac{B}{k+3} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3}\right).$$

Damit erhalten wir eine Teleskopreihe, denn es gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} &= \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \end{aligned}$$

und wir berechnen die Reihe durch

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)\cdot(k+3)} &= \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+3} \\ &= \frac{1}{2}\cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

c) Bei der dritten Aufgabe handelt es sich ebenfalls um eine Teleskopreihe in bei der sich jeweils zwei Differenzen erkennen lassen, denn

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - 2\cdot\sqrt{k} + \sqrt{k-1} &= (\sqrt{2} - \sqrt{1} - \sqrt{1} + \sqrt{0}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2} - \sqrt{2} + \sqrt{1}) \\ &\quad + \sqrt{4} - \sqrt{3} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ &\quad + \ldots \end{aligned}$$

Wir betrachten die Summationsvorschrift als die Differenzen $\sqrt{k+1} - \sqrt{k}$ und $\sqrt{k-1} - \sqrt{k}$.

(Neue Farbbelegung ab hier:) Wir erkennen zudem, dass aus der ersten Differenz der erste Summand von $-\sqrt{k}$ und der letzte von $\sqrt{k+1}$ stehen bleibt sowie aus der zweiten Differenz der erste von $\sqrt{k-1}$ und der letzte von $\sqrt{k}$. Damit berechnen wir die Reihe durch

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - 2\cdot\sqrt{k} + \sqrt{k-1} = \lim_{n\to\infty} -\sqrt{1} + \sqrt{0} + \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1.$$

Mit den Hilfsregeln zur Konvergenz von Differenzen von Wurzeln erhalten wir abschließend:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1 &= \lim_{n\to\infty} (\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\cdot\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-1 \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-1 \\
&= 0-1 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

d) Bei dieser Reihe wenden wir erneut den Trick beziehungsweise die Partialbruchzerlegung an. Da wir im zweiten Beispiel bereits beide Varianten durchgeführt haben, beschränken wir uns bei dieser Aufgabe auf den Trick. Es gilt

$$\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{(k-1)\cdot(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{(k+1)-(k-1)}{(k-1)\cdot(k+1)} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1}\right).$$

Damit berechnen wir den Wert der Reihe durch

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k^2-1} &= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k+1} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

e) Diese Reihe formen wir wie schon im ersten Beispiel in zwei geometrische Reihen um und können sie im Anschluss berechnen. Dabei dürfen wir nicht übersehen, dass die Reihe bei $k = 1$ beginnt, sodass wir in der Formel der geometrischen Reihe eine zusätzlich -1 erhalten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3-2^k}{5^{k+1}} &= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{3}{5\cdot 5^k}-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{5\cdot 5^k} \\
&= \frac{3}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5}\right)^k-\frac{1}{5}\cdot\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^k \\
&= \frac{3}{5}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}}-1\right)-\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{2}{5}}-1\right) \\
&= \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3} \\
&= \frac{1}{60}.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 28

a) Für das Quotientenkriterium berechnen wir für $a_k = \frac{2^k}{(k+1)!}$ den Wert q entsprechend der Definition. Im Anschluss lösen wir den Doppelbruch auf und bringen die Faktoren zusammen auf einen Bruch, die sich kürzen lassen. Es gilt:

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}}{\frac{2^k}{(k+1)!}}\right| = \limsup_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}\cdot\frac{(k+1)!}{2^k}$$

$$= \limsup_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}}{2^k}\cdot\frac{(k+1)!}{(k+2)!} = \limsup_{k\to\infty} 2\cdot\frac{1}{k+2} = \lim_{k\to\infty} 2\cdot\frac{1}{k+2} = 0$$

Da der berechnete Wert $q = 0 < 1$ ist, konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

b) Für die zweite Reihe gehen wir analog vor. Mit $a_k = \frac{2^k+3^k}{(k!)^2}$ folgt:

$$\limsup_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \limsup_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{2^{k+1}+3^{k+1}}{((k+1)!)^2}}{\frac{2^k+3^k}{(k!)^2}}\right| = \limsup_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}+3^{k+1}}{((k+1)!)^2}\cdot\frac{(k!)^2}{2^k+3^k}$$

$$= \limsup_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}+3^{k+1}}{2^k+3^k}\cdot\frac{(k!)^2}{((k+1)!)^2} = \limsup_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}+3^{k+1}}{2^k+3^k}\cdot\frac{1}{(k+1)^2}$$

Dabei konnten wir die Fakultät auch zum Quadrat kürzen, da jeder Faktor quadriert wird und somit im Zähler und im Nenner auftaucht.

Wir zeigen, dass der erste Faktor konvergiert, sodass wir statt des lim sup den lim berechnen können. Dazu klammern wir den am schnellsten wachsenden Term des Nenners 3^k aus und erhalten:

$$\lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}+3^{k+1}}{2^k+3^k} = \lim_{k\to\infty}\frac{3^k\cdot\left(\frac{2\cdot 2^k}{3^k}+\frac{3\cdot 3^k}{3^k}\right)}{3^k\cdot\left(\frac{2^k}{3^k}+\frac{3^k}{3^k}\right)} = \lim_{k\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k+3}{\left(\frac{2}{3}\right)^k+1}$$

$$= \frac{\lim\limits_{k\to\infty} 2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k + \lim\limits_{k\to\infty} 3}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k + \lim\limits_{k\to\infty} 1} = \frac{2\cdot 0+3}{0+1} = 3$$

Insgesamt folgt daher

$$q = \limsup_{n\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\frac{2^{k+1}+3^{k+1}}{2^k+3^k}\cdot\frac{1}{(k+1)^2} = 3\cdot 0 = 0.$$

Da $q < 1$ konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

Lösung zu Aufgabe 29

a) Für das Wurzelkriterium berechnen wir den Wert q entsprechend der Definition. Mit der Vorschrift $a_k = \sqrt{3^k} \cdot \frac{1}{4^k}$ folgt:

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\sqrt{3^k} \cdot \frac{1}{4^k}\right|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\sqrt{3^k}} \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{4^k}} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt{\sqrt[k]{3^k}} \cdot \sqrt[k]{\frac{1}{4^k}} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

Da $q = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{\sqrt{3}}{4} < 1$ ist, konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

b) Wir berechnen analog für $a_k = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$:

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}\right|} = \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k$$

Diese Folge bringen wir in eine uns bekannte Folge, indem wir im Zähler geschickt eine 0 addieren und anschließend den Nenners des negativen Terms kleiner schätzen:

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k &= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{k \overbrace{+1-1}^{=0}}{k+1}\right)^k = \limsup_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k+1}\right)^k \\ &\leq \limsup_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \\ &= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{k}\right)^k \\ &= e^{-1} = \frac{1}{e}\end{aligned}$$

Da $q = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} \leq \frac{1}{e} < 1$ ist, konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

Lösung zu Aufgabe 30

a) Für die Vergleichskriterien betrachten wir den am schnellsten wachsenden Term des Nenners und des Zählers, sodass wir ein Gefühl für die Konvergenz oder Divergenz erhalten. In diesem Beispiel ist der Zähler konstant 1, während der am schnellsten wachsende Term des Nenners $2k^3$ ist. Die Reihe verhält sich „im Unendlichen" also wie $\frac{1}{2k^3}$, sodass wir Konvergenz vermuten und das Majorantenkriterium anwenden wollen. Diese Schlussfolgerung basiert auf der Aussage dass eine Reihe über $\frac{1}{n^\alpha}$ genau dann konvergiert, wenn $\alpha > 1$ gilt.

Daher schätzen wir den Nenner nach unten ab und erhalten:

$$2k^3 - k + 1 \geq 2k^3 - k \geq 2k^3 - k^3 = k^3.$$

Für die Reihe ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k^3 - k + 1} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3} < \infty,$$

sodass sie nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

b) Beim zweiten Beispiel gehen wir ähnlich vor. Wir erkennen direkt, dass

$$\frac{2}{\sqrt{k}} + k + 1 \geq k$$

gilt, sodass die Summationsvorschrift zum Einen keine Nullfolge ist und damit nach dem Nullfolgenkriterium nicht konvergiert und zum Anderen mit dem Minorantenkriterium die Divergenz aus der Abschätzung

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k}} + k + 1 \geq \sum_{k=2}^{\infty} k = \infty$$

folgt.

Lösung zu Aufgabe 31

a) Damit die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergiert, muss (a_k) alternierend und $(|a_k|)$ eine monoton fallende Nullfolge sein. Da $\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}} > 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$, folgt die erste Eigenschaft aus

$$a_{k+1} \cdot a_k = \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{k+1}}}} \cdot \frac{(-1)^k}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}} = (-1)^{2k+1} \cdot \sqrt{\sqrt{\sqrt{k \cdot (k+1)}}} = -\sqrt{\sqrt{\sqrt{k \cdot (k+1)}}} < 0.$$

Da die Wurzelfunktion monoton wachsend ist, ist auch die Verknüpfung mehrerer Wurzelfunktionen monoton wachsend, sodass der Kehrwert monoton fällt. Mit Potenzgesetzen folgt

$$\lim_{k\to\infty} |a_k| = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\sqrt{k}}}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k^{\frac{1}{8}}} = \lim_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{\frac{1}{8}} = 0.$$

Damit ist die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergent.

b) Wir beweisen die gleiche drei Bedingungen für das Leibnizkriterium. Zunächst betrachten wir die Funktion $\sin\left(\frac{1}{k}\right)$:

Zum einen gilt

$$0 < \frac{1}{k} < 1 < \pi \quad \text{, sodass} \quad \sin\left(\frac{1}{k}\right) \geq 0$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ ist.

Zum anderen erhalten wir die Ableitung der Abbildung $\sin(x) : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \sin(x) = \cos(x)$$

Aufgrund von $\cos(x) \geq 0$ für alle $x \in [0, 1]$ ist $\sin(x)$ monoton wachsend.

Da $\frac{1}{k}$ eine monoton fallende Folge ist, ist $\sin\left(\frac{1}{k}\right)$ ebenfalls monoton fallend. Zudem gilt wegen der Stetigkeit der Sinusfunktion

$$\lim_{k\to\infty} \sin\left(\frac{1}{k}\right) = \sin\left(\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right) = \sin(0) = 0.$$

Damit ist $(|a_k|)$ eine monoton fallende Nullfolge und mit

$$\begin{aligned} a_{k+1} \cdot a_k &= (-1)^{k+1} \cdot \sin\left(\frac{1}{k+1}\right) \cdot (-1)^k \cdot \sin\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= (-1)^{2k+1} \cdot \sin\left(\frac{1}{k+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{k}\right) \\ &= -\sin\left(\frac{1}{k+1}\right) \cdot \sin\left(\frac{1}{k}\right) \\ &< 0 \end{aligned}$$

ist die Folge (a_n) alternierend, sodass die Reihe nach dem Leibnizkriterium konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 32

Bei dieser Aufgabe besteht für jede Reihe eine freie Wahl der Konvergenzkriterien. Meistens sind mehr als ein Kriterium oder sogar fast alle zielführend. Wir beschränken uns in den Lösungen auf die, die unserer Meinung nach angenehmer für die entsprechende Aufgabe zu rechnen sind:

a) Bei dieser Aufgabe bietet sich das Minorantenkriterium an, da der am schnellsten wachsende Term des Nenners $\sqrt{k+3}$ ist, während der Zähler konstant bleibt. Wir vermuten „im Unendlichen" ein Verhalten der Reihe wie $\frac{1}{\sqrt{k}}$ und damit ihre Divergenz. Um das Kriterium anzuwenden, schätzen den Nenner passend nach oben ab:

$$\sqrt{k+3} + \sqrt{k-1} \leq \sqrt{k-1} + \sqrt{k-1} = 2 \cdot \sqrt{k-1}$$

Damit ergibt sich für die Reihe mit einem Index-Shift um 1 nach der Abschätzung

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k+3} + \sqrt{k-1}} &\geq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2 \cdot \sqrt{k-1}} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} \\ &= \infty, \end{aligned}$$

sodass die Reihe nach dem Minorantenkriterium divergiert.

b) Das $(-1)^k$ verleitet uns dazu, das Leibnizkriterium anzuwenden. Die Folge (a_k) ist alternierend, da

$$\begin{aligned} a_{k+1} \cdot a_k &= \frac{(-1)^{k+1} \cdot 2}{\sqrt[3]{k+1}} \cdot \frac{(-1)^k \cdot 2}{\sqrt[3]{k}} \\ &= (-1)^{2k+1} \cdot \frac{4}{\sqrt[3]{k \cdot (k+1)}} \\ &= -\underbrace{\frac{4}{\sqrt[3]{k \cdot (k+1)}}}_{>0} \\ &< 0. \end{aligned}$$

Zudem ist $(|a_k|)$ eine monotone Nullfolge, da die Wurzelfunktion monoton wachsend ist, sodass der Kehrwert monoton fällt. Die Multiplikation mit 2 ändert an dieser Aussage nichts. Die Nullfolge folgt aus dem Sandwich-Lemma mit:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt[3]{k}} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{k}} = 0$$

Damit konvergiert die Reihe nach dem Leibnizkriterium.

c) Bei dieser Reihe bietet sich das Wurzelkriterium an, da wir einen kompletten Ausdruck potenziert mit k vorliegen haben. Daher berechnen wir das q entsprechend der Definition und erhalten

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\left(\frac{1}{2} - k + \sqrt{k^2+1}\right)^k\right|} \\ &= \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2} - k + \sqrt{k^2+1}\end{aligned}$$

Wir zeigen die Konvergenz der Folge indem wir eine passende Erweiterung multiplizieren, wie wir sie bei Differenzen von Wurzeln machen würden. In diesem Fall interpretieren wir $-k+\sqrt{k^2+1}$ als $\sqrt{k^2+1}-\sqrt{k^2}$. Es gilt

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \sqrt{k^2+1} - k &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + (\sqrt{k^2+1} + k) \cdot \frac{\sqrt{k^2+1}+k}{\sqrt{k^2+1}+k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{k^2+1-k^2}{\sqrt{k^2+1}+k} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} \\ &= \frac{1}{2} + 0 \\ &= \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$q = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \frac{1}{2},$$

sodass die Reihe nach dem Wurzelkriterium konvergiert.

d) Bei dieser Reihe überlegen wir uns, dass der Zähler zwar von k abhängt, er aber beschränkt ist. Da im Nenner der am schnellsten wachsende Term k^4 vorkommt, vermuten wir insgesamt Konvergenz und benutzen das Majorantenkriterium.

Mit Blick auf Aufgabe Aufgabe 33 schätzen wir den Zähler betraglich nach oben und den Nenner nach unten ab. Zum Einen gilt

$$\left|2 + (-1)^k \cdot 3\right| \leq |2| + \left|(-1)^k \cdot 3\right| = 2+3 = 5$$

und zum Anderen erhalten wir

$$k^4 + 1 \geq k^4.$$

Damit folgt für die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|\frac{2+(-1)^k \cdot 3}{k^4+1}\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{5}{k^4} = 5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^4} < \infty,$$

sodass die Reihe nach dem Majorantenkriterium absolut konvergiert.

e) Auch bei diesem Beispiel wenden wir das Majorantenkriterium an. Der Zähler ist beschränkt und im Nenner müssen wir aufgrund des Produkts den am schnellsten wachsenden Term $\sqrt{k^2} \cdot \sqrt{k^3} = \sqrt{k^5}$ betrachten. Daher vermuten wir Konvergenz und schätzen den Nenner nach unten ab:

$$\sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{k^3-1} = \sqrt{(k^2+1)\cdot(k^3-1)} = \sqrt{k^5+k^3-k^2-1} \geq \sqrt{k^5}$$

Dabei ist die letzte Ungleichung ab $k = 2$ erfüllt, da

$$k^3 = k \cdot k^2 \geq 2 \cdot k^2 = k^2 + k^2 \geq k^2 + 2.$$

Damit gilt für die Reihe

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k^2+1} \cdot \sqrt{k^3-1}} \leq \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{k^5}} = 2 \cdot \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{5}{2}}} < \infty,$$

sodass die Reihe nach dem Majorantenkriterium konvergiert.

f) Bei dieser Reihe bietet sich das Wurzelkriterium an, da wir ein k im Exponenten haben. Für $a_k = 2^{(-1)^k - k}$ berechnen wir

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} &= \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|2^{(-1)^k-k}\right|} \\
&= \limsup_{k\to\infty} 2^{\frac{(-1)^k}{k}-1} \\
&= \lim_{k\to\infty} 2^{\frac{(-1)^k}{k}-1} \\
&= 2^{0-1} \\
&= \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Da $q = \frac{1}{2} < 1$ konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium.

g) Aufgrund der Fakultät bietet sich das Quotientenkriterium an, da sich diese sehr leicht kürzen lässt. Für $a_k = \frac{k!}{k^k}$ berechnen wir entsprechend der Definition:

$$\begin{aligned}
\limsup_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \limsup_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{k!}{k^k}} \right| \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{k!} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{k^k}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{(k+1)!}{k!} \\
&= \limsup_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} \cdot \frac{k^k}{(k+1)^k} \cdot (k+1) \\
&= \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k
\end{aligned}$$

Wie in Aufgabe 29 b) bereits gezeigt, konvergiert die Folge mit der Vorschrift $\left(\frac{k}{k+1}\right)^k$ gegen $\frac{1}{e}$, sodass die Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergiert, da $q = \frac{1}{e} < 1$.

h) Die Reihe unterscheidet sich nur geringfügig von der letzten, sodass wir erneut das Quotientenkriterium anwenden. Da das zuvor berechnete $q > 0$ war, vermuten wir jedoch, dass die Reihe durch das Quadrat im Zähler nicht mehr konvergiert, sodass wir entsprechend der Definition des Quotientenkriteriums den lim inf betrachten. Es folgt

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \liminf_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{((k+1)!)^2}{(k+1)^{k+1}}}{\frac{(k!)^2}{k^k}}\right| \\
&= \liminf_{k\to\infty}\frac{((k+1)!)^2}{(k+1)^{k+1}}\cdot\frac{k^k}{(k!)^2} \\
&= \liminf_{k\to\infty}\frac{k^k}{(k+1)^{k+1}}\cdot\left(\frac{(k+1)!}{k!}\right)^2 \\
&= \liminf_{k\to\infty}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{k^k}{(k+1)^k}\cdot(k+1)^2 \\
&= \liminf_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k\cdot(k+1).
\end{aligned}$$

Wir haben bereits gesehen, dass der erste Faktor konvergiert und damit beschränkt ist. Der zweite Faktor divergiert bestimmt gegen unendlich, sodass die Reihe nicht konvergiert.

i) Auch bei dieser Reihe lohnt es sich das Quotientenkriterium anzuwenden, da Fakultäten im Spiel sind. Ohne Weiteres lässt sich an der Reihe kein Konvergenzverhalten erkennen, jedoch benutzen wir direkt den lim inf, da die Reihe nicht konvergiert. Theoretisch hätte man auch mit dem lim sup starten können und gesehen, dass es nicht funktioniert. Insgesamt gilt:

$$\begin{aligned}
\liminf_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| &= \liminf_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(3(k+1))!}{3^{k+1}\cdot((k+1)!)}}{\frac{(3k)!}{3^k\cdot(k!)}}\right| \\
&= \liminf_{k\to\infty}\frac{(3k+3))!}{3^{k+1}\cdot((k+1)!)}\cdot\frac{3^k\cdot(k!)}{(3k)!} \\
&= \liminf_{k\to\infty}\frac{(3k+3))!}{(3k)!}\cdot\frac{3^k\cdot(k!)}{3^{k+1}\cdot(k+1)!} \\
&= \liminf_{k\to\infty}(3k+3)\cdot(3k+2)\cdot(3k+1)\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{k+1} \\
&= \liminf_{k\to\infty}(3k+2)\cdot(3k+1) \\
&= \infty
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im letzten Schritt $3k+3$ mit $\frac{1}{3}$ und $k+1$ gekürzt. Wir sehen, dass die vorletzte Zeile gegen unendlich strebt, sodass die Reihe nicht konvergiert.

Lösung zu Aufgabe 33

Generell lassen sich alle absolut konvergenten Reihen ohne Weiteres umordnen:

- Die erste, achte und neunte Reihe divergieren, somit ist eine Umordnung nicht erlaubt.
- Die zweite Reihe konvergiert zwar, jedoch konvergiert sie nicht absolut, da die Reihe über $\frac{1}{\sqrt[3]{k}}$ divergiert, sodass auch hier keine Umordnung stattfinden darf.
- Alle weiteren Reihen konvergieren absolut und dürfen beliebig umgeordnet werden.

Bekanntermaßen konvergiert die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ nach dem Leibnizkriterium, aber sie ist nicht absolut konvergent, daher dürfen wir sie nicht nach Belieben umordnen. Wir erhalten für jede ungerade Zahl k ein negatives und für alle geraden Zahlen k ein positives Folgeglied. Fassen wir wie beim Cauchy'schen Verdichtungssatz jeweils 2^{n-1} negative Folgeglieder für das n-te positive Folgeglied zusammen, so ergibt sich

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+3} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}-1} \geq \overbrace{\frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{n+1}}}^{2^{n-1}\text{ mal}} = \frac{2^{n-1}}{2^{n+1}} = \frac{1}{4}.$$

Verrechnen wir diese Blöcke, die jeweils $\frac{1}{4}$ ergeben mit der positiven Zahl, die mit jedem Block kleiner wird (während $\frac{1}{4}$ gleich bleibt), so erhalten wir

$$-1 + \frac{1}{2} - \underbrace{\frac{1}{3}}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{4} - \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{6} - \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} + \frac{1}{15}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} + \frac{1}{8} - \ldots$$

$$\leq \underbrace{-1 + \frac{1}{2}}_{\leq -\frac{1}{12}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{4}}_{=0} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{6}}_{=-\frac{1}{12}} \underbrace{- \frac{1}{4} + \frac{1}{8}}_{\leq -\frac{1}{12}} - \ldots$$

Wir erhalten auf diese Weise mindestens unendlich oft den Summanden $-\frac{1}{12}$, sodass diese Umordnung gegen $-\infty$ divergiert.

1.4 zu Stetigkeit

Lösung zu Aufgabe 34

a) Wir nehmen eine beliebige Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathbb{R}.$$

Dann folgt mit den Grenzwertsätzen (GWS), dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n^2} \overset{\text{GWS}}{=} \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} x_n} = \frac{1}{x\cdot x} = \frac{1}{x^2} = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Damit ist die Funktion nach dem Prinzip der Folgenstetigkeit stetig.

b) Da die Funktion lediglich den Definitionsbereich $[1,\infty)$ besitzt, können wir den Betrag weglassen und erhalten mit den Grenzwertsätzen direkt

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} (x_n^2 + x_n) \overset{\text{GWS}}{=} \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} x_n = x\cdot x + x = x^2 + x = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right).$$

Damit ist auch die zweite Funktion nach dem Prinzip der Folgenstetigkeit stetig.

Lösung zu Aufgabe 35

a) Für das ε-δ-Kriterium betrachten wir für $x, x_0 \in [1,\infty)$ zunächst den Abstand der Funktionswerte:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x_0^2}\right| = \left|\frac{x_0^2 - x^2}{x^2\cdot x_0^2}\right| = |x - x_0| \cdot \frac{x + x_0}{x^2 \cdot x_0^2}$$

Da sowohl x als auch x_0 durch 1 nach unten beschränkt sind, können wir den Nenner mit 1 nach unten abschätzen, so erhalten wir

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot |x + x_0|.$$

Den ersten Faktor können wir bald durch δ nach oben abschätzen, jedoch müssen wir den zweiten Term noch unter Kontrolle bekommen, da δ nicht von x und x_0 abhängen darf. Daher berechnen wir

$$|x + x_0| = \left|x \underbrace{- x_0 + x_0}_{=0} + x_0\right| \leq |x - x_0| + 2|x_0| < \delta + 2|x_0| = \delta + 2x_0.$$

Insgesamt haben wir nun fast alles, um die Stetigkeit zu beweisen. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und $|x - x_0| < \delta$, dann folgt

$$|f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| \cdot (x + x_0) < \delta \cdot (\delta + 2x_0).$$

Da das doppelte δ stört, können wir annehmen (das können wir immer), dass $\delta \leq 1$ sein soll. Damit ist

$$|f(x) - f(x_0)| < \delta \cdot (1 + 2x_0).$$

Insgesamt fordern wir zudem, dass $\delta \leq \dfrac{\varepsilon}{1+2x_0}$ sein soll, damit

$$|f(x)-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{1+2x_0}\cdot(1+2x_0) = \varepsilon$$

folgt. Wir finden somit für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta = \min\left(1, \dfrac{\varepsilon}{1+2x_0}\right)$, sodass die Implikation

$$|x-x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Damit ist f nach dem ε-δ-Kriterium stetig.

b) Für die Wurzelfunktion berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned}
|f(x)-f(x_0)| &= \left|\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right| = \left|\left(\sqrt{x}-\sqrt{x_0}\right)\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right| \\
&= \left|\frac{x^2-x_0^2}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}}\right| \leq \left|\frac{x^2-x_0^2}{\sqrt{1}+\sqrt{1}}\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot\left|x^2-x_0^2\right| \\
&= \frac{1}{2}\cdot|x-x_0|\cdot|x+x_0]
\end{aligned}$$

Damit können wir analog zum ersten Beispiel vorgehen und die Stetigkeit beweisen.

Lösung zu Aufgabe 36
Zunächst behandeln wir die Unstetigkeit:

Sei $x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, sodass $f(x) = x$. Wir finden zu beliebig kleinem $\delta > 0$ immer ein x_0 mit

$$|x-x_0| < \delta \quad \text{und } x_0 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q},$$

sodass $f(x_0) = 1-x_0$. Daraus folgt

$$|f(x)-f(x_0)| = |x-(1-x_0)| = |x+x_0-1|$$

Betrachten wir den Fall $x < \frac{1}{2}$, so fordern wir

$$\delta < \frac{\frac{1}{2}-x}{2} \quad \text{(die Hälfte der Strecke von } x \text{ zu } \frac{1}{2}),$$

sodass $x_0 < \frac{1}{2}$ sein muss, sodass $x+x_0 < 1$ gilt. Wir wählen explizit $x_0 = x+\delta$ und erhalten

$$|x+x_0-1] = 1-x-x_0 = 1-2x-\delta = 1-2x-\frac{\frac{1}{2}-x}{2} = \frac{3}{4}-\frac{3}{2}x = \frac{3}{4}\cdot(1-2x) > 0.$$

Da der Wert x fest ist, kann er nicht beliebig klein werden. Beispielsweise zu $\varepsilon = \frac{3}{8}\cdot(1-2x) > 0$ erhalten wir den Widerspruch

$$\frac{3}{4}\cdot(1-2x) = 2\cdot\frac{3}{8}\cdot(1-2x) = 2\cdot\varepsilon > \varepsilon,$$

sodass f für $x < \frac{1}{2}$ nicht stetig ist.

Der Fall $x > \frac{1}{2}$ funktioniert analog. Tauschen wir die Rolle von x und x_0 so erhalten wir die Unstetigkeit an allen Stellen $x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, sodass wir uns nun auf die Stetigkeit in $x = \frac{1}{2}$ konzentrieren.

Sei $x = \frac{1}{2}$, dann gilt

$$|f(x) - f(x_0)| = \left|f\left(\frac{1}{2}\right) - f(x_0)\right| = \left|\frac{1}{2} - (1 - x_0)\right| = \left|-\frac{1}{2} + x_0\right| = |-x + x_0| = |x - x_0| < \delta$$

Wählen wir $\delta = \varepsilon$ folgt die Behauptung.

Lösung zu Aufgabe 37

a) Die Logarithmusfunktion ist auf allen positiven Zahlen definiert und stetig. Da $1 + x^2 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist f als Komposition stetiger Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

b) Sowohl $a \cdot x$ als auch $x + a$ sind als Komposition stetiger Funktionen wieder stetig. Daher genügt es den Übergangsschritt zu überprüfen. Es gilt

$$\lim_{x \uparrow 2} f(x) = \lim_{x \uparrow 2} a \cdot x = 2a$$

und

$$\lim_{x \downarrow 2} f(x) = f(2) = 2 + a.$$

Wir erhalten die Gleichheit durch

$$2a = 2 + a \Leftrightarrow a = 2.$$

Die Funktion f ist für $a = 2$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und für $a \neq 2$ auf $\mathbb{R}\backslash\{2\}$.

c) In diesem Beispiel sind $x^2 - ax$, $x + b$ und $b \cdot x^2 + b$ als Komposition stetiger Funktionen stetig, sodass wir erneut die Übergangsschritte betrachten. Es gilt

$$\begin{aligned}
\lim_{x \uparrow 1} f(x) &= \lim_{x \uparrow 1} x^2 - ax &&= 1 - a \\
\lim_{x \downarrow 1} f(x) &= f(1) &&= 1 + b \\
\lim_{x \uparrow 2} f(x) &= \lim_{x \uparrow 2} x + b &&= 2 + b \\
\lim_{x \downarrow 2} f(x) &= f(2) &&= 5b
\end{aligned}$$

Setzen wir die letzten beiden Grenzwerte gleich, so ergibt sich

$$2 + b = 5b \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}.$$

Daraus erhalten mit den ersten beiden Grenzwerten

$$1 - a = 1 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Damit f ist für $a = -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, für $a \neq -\frac{1}{2}$ und $b = \frac{1}{2}$ auf $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ stetig.

Ist $b \neq \frac{1}{2}$ liegt keine Stetigkeit an der Stelle $x = 2$ vor, jedoch können wir eine Stetigkeit an der Stelle $x = 1$ erzeugen. Setzen wir die ersten beiden Gleichungen erneut gleich, erhalten wir

$$1 - a = 1 + b \Leftrightarrow a = -b,$$

sodass bei dieser Konstellation Stetigkeit in $x = 1$ vorliegt, ansonsten nicht.

Lösung zu Aufgabe 38

Aufgaben bei denen die Existenz einer Nullstelle gezeigt werden soll, zielen meist auf den Zwischenwertsatz ab, wenn die Nullstelle nicht direkt berechnet werden kann. Ein guter Hinweis ist in der Regel ein angegebenes Intervall, sodass man die Grenzen einsetzen kann. Da die Funktion hier auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, überlegen wir uns, welche Zahlen wir einsetzen können. Der $\cos(x)$ ist durch -1 und 1 beschränkt, sodass wir eine negative Zahl einsetzen, damit x^3 betraglich größer als $x^2 + 1$ ist. Wir wählen der Einfachheit halber $x = -2$, aber es gibt unendlich viele mögliche Werte, die gewählt werden können. In diesem Fall gilt

$$f(-2) = (-2)^3 + (-2)^2 \cdot \cos(-2) + 1 = -8 + 4 \cdot \cos(-2) + 1 < -7 + 4 = 3.$$

Als weitere (einfache) Stelle wählen wir $x = 0$ und erhalten

$$f(0) = 0^3 + 0^2 \cdot \cos(0) + 1 = 1.$$

Die Funktion wechselt daher zwischen $x = -2$ und $x = 0$ das Vorzeichen. Da sie als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, muss sie nach dem Zwischenwertsatz zwischen diesen Werten eine Nullstelle besitzen.

Lösung zu Aufgabe 39

Wir schreiben den Fixpunkt künstlich um, sodass wir den Zwischenwertsatz benutzen können. Es gilt

$$f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0.$$

Die Funktion f besitzt demnach einen Fixpunkt, wenn die Funktion $g(x) = f(x) - x$ eine Nullstelle besitzt. Da f nach Aufgabenstellung stetig ist, ist g ebenfalls stetig. Wir setzen die Randwerte des Definitionsbereichs ein uns erhalten

$$g(0) = f(0) - 0 = f(0) \quad \text{sowie}\, g(1) = f(1) - 1.$$

Per Definition gilt $f(0) \geq 0$, da der Zielbereich $[0, 1 1]$ ist. Mit der gleichen Begründung ist $g(1) \leq 0$, da f maximal 1 werden kann. Entweder ist daher bereits $g(0)$ oder $g(1)$ eine Nullstelle von g oder sie haben ein unterschiedliches Vorzeichen, sodass zwischen diesen Werten eine Nullstelle existieren muss. Mit der Existenz mindestens einer Nullstelle von g folgt der geforderte Fixpunkt für f.

Lösung zu Aufgabe 40

Für die gleichmäßige Stetigkeit beweisen wir die Ungleichung

$$\left|\sqrt{x} - \sqrt{y}\right| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Sei dazu nächst $x > y$, so formen wir äquivalent um:

$$\begin{array}{lrcl} & \sqrt{x}-\sqrt{y} & \leq & \sqrt{x-y} \\ \Leftrightarrow & \left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2 & \leq & x-y \\ \Leftrightarrow & x-2\cdot\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}+y & \leq & x-y \\ \Leftrightarrow & 2y & \leq & 2\cdot\sqrt{x}\sqrt{y} \\ \Leftrightarrow & y & \leq & \sqrt{x}\sqrt{y} \end{array}$$

Die letzte Aussage ist dabei eine wahre Aussage, denn für $x > y$ und der Monotonie der Wurzelfunktion erhalten wir

$$y = \sqrt{y^2} = \sqrt{y\cdot y} \leq \sqrt{x\cdot y} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{y}.$$

Für $x < y$ lösen wir den Betrag auf beiden Seiten andersherum auf und erhalten das gleiche Ergebnis.

Mit dieser Ungleichung folgt für $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ sowie $|x-y| \leq \delta$

$$|f(x)-f(y)| = |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\delta}.$$

Wählen wir $\delta = \varepsilon^2$ haben wir die gleichmäßige Stetigkeit gezeigt, da δ nicht von x_0 abhängt.

Da ein Gegenbeispiel oft „vom Himmel fällt“ und schwierig zu motivieren ist, führen wir an dieser Stelle einen fiktiven Gedankenprozess an:

- Die Lipschitzstetigkeit sagt etwas darüber aus, dass sich das Änderungsverhalten der Funktion nicht zu stark ändert.
- Das Änderungsverhalten der Wurzel ist am steilsten in der Nähe von 0 (Ableitung ist $\frac{1}{2\sqrt{x}}$).
- Wir wählen daher als ersten Versuch $x_0 = 0$.
- Damit nun die Lipschitzstetigkeit erfüllt ist, muss

  $$|\sqrt{x}-\sqrt{0}| < L\cdot|x-0| \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq L\cdot x$$

  gelten.
- Ein simpler Widerspruch wäre

  $$L > 1+L.$$

- Stellen wir obige Gleichung um, erhalten wir

  $$\sqrt{x} \leq L\cdot x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} \leq L$$

- Wenn wir x so wählen, dass links $1+L$ steht, sind wir fertig. Daher wählen wir

  $$x = \left(\frac{1}{1+L}\right)^2.$$

Lösung zu Aufgabe 41

Zunächst die Stetigkeit:

Die Funktion $x \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist auf $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ als Komposition stetiger Funktionen stetig. Damit bleibt der Übergang in $x = 0$ zu überprüfen:

Sei (x_n) eine Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Dann folgt mit den Abschätzungen $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$

$$-x_n \leq x_n \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x_n.$$

Da sowohl x_n als auch $-x_n$ gegen 0 konvergieren, folgt die Stetigkeit aus der Folgenstetigkeit und dem Sandwich-Lemma.

Für die gleichmäßige Stetigkeit auf $(0,1]$ betrachten wir die Funktion auf dem Kompakten Intervall $[0,1]$. Im ersten Teil der Aufgabe haben wir gezeigt, dass f auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, sodass wir eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall betrachten, sodass f auf $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist und damit ist sie dies auch auf $(0,1]$.

Lösung zu Aufgabe 42

Seien f und g zwei lipschitzstetige Funktionen mit Lipschitzkonstanten L_f und L_g. Dann gilt für Summe

$$\begin{aligned} |f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)| &= |(f(x)-f(x_0))+(g(x)-g(x_0))| \\ &\leq |f(x)-f(x_0)|+|g(x)-g(x_0)| \\ &\leq L_f \cdot |x-x_0| + L_g \cdot |x-x_0| \\ &= (L_f+L_g)\cdot|x-x_0|. \end{aligned}$$

Damit ist $f+g$ ebenfalls lipschitzstetig mit Lipschitzkonstante $L_f + L_g$.

Wir haben bereits gezeigt, dass die Funktion x^2 auf $\mathbb{R}$ nicht gleichmäßig stetig ist. Da $f(x) = x$ und $g(x) = x$ jeweils lipschitzstetige Funktionen sind, kann das Produkt $f(x) \cdot g(x) = x \cdot x = x^2$ nicht lipschitzstetig sein, da aus der Lipschitzstetigkeit die gleichmäßige Stetigkeit folgt.

1.5 zu Differenzierbarkeit

Lösung zu Aufgabe 43

a) In diesem Fall berechnen wir

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x+h+1-(x+1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = \lim_{h\to 0} 1 = 1.$$

b) Im zweiten Beispiel gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\left((x+h)^2-(x+h)\right)-\left((x^2-x)\right)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{x^2+2xh+h^2-x-h-x^2+x}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2-h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} 2x+h-1 \\ &= 2x-1 \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 44
Sei $u(x) = a\cdot f(x)+g(x)$. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} u'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(a\cdot f(x+h)+g(x+h))-(a\cdot f(x)+g(x))}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a\cdot f(x+h)-a\cdot f(x)+g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{a\cdot f(x+h)-a\cdot f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= a\cdot \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{g(x+h)-g(x)}{h} \\ &= a\cdot f'(x)+g'(x). \end{aligned}$$

Dabei dürfen wir den Grenzwert nur auf zwei Brüche aufteilen, da beide im Nachhinein konvergent sind.

Lösung zu Aufgabe 45

a) In diesem Fall benutzen wir die Summenregel und erhalten

$$f'(x) = 3\cdot x^2+2\cdot x+1+0-\frac{1}{x^2}.$$

b) In diesem Beispiel liegt eine Verkettung vor, sodass wir mit der Kettenregel arbeiten. Sei $f(x) = e^x$ die äußere Funktion, sowie $g(x) = \sin(x)$ die innere Funktion, so gilt

$$f'(x) = \overbrace{e^{\sin(x)}}^{=f'(g(x))} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=g'(x)}.$$

c) Bei dieser Aufgabe handelt es sich um ein Produkt von 3 Funktionen, sodass wir in zwei Schritten Ableiten. Sei

$$g(x) = \overbrace{\sin(x)}^{=\,u(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=\,v(x)} \text{ und } h(x) = x.$$

Wir berechnen zunächst die Ableitung der Funktion f durch

$$g'(x) = \overbrace{\cos(x)}^{=\,u'(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{=\,v(x)} + \overbrace{\sin(x)}^{=\,u(x)} \cdot \underbrace{(-\sin(x))}_{=\,v'(x)} = \cos^2(x) - \sin^2(x).$$

Insgesamt erhalten wir damit

$$\begin{aligned} f'(x) &= g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \\ &= (\cos^2(x) - \sin^2(x)) \cdot x + \sin(x) \cdot \cos(x). \end{aligned}$$

d) Im letzten Beispiel wenden wir die Produkt- sowie zweimal die Kettenregel an. Insgesamt erhalten wir

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\sin\left(\sqrt{x \cdot e^x}\right) \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x \cdot e^x}} \cdot (x \cdot e^x + 1 \cdot e^x) \\ &= -\frac{1}{2} \cdot \sin\left(\sqrt{x \cdot e^x}\right) \cdot \frac{(x+1) \cdot e^x}{\sqrt{x \cdot e^x}} \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 46

a) Da sowohl x als auch $1 - e^x$ als Komposition differenzierbarer Funktionen differenzierbar sind, betrachten wir die beiden Grenzwerte von unten und oben gegen die Übergangsstelle $x = 0$. Zum Einen gilt

$$\begin{aligned} \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} \\ &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{h - (1 - e^0)}{h} \\ &= \lim_{h \uparrow 0} \frac{h}{h} \\ &= \lim_{h \uparrow 0} 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

und zum Anderen erhalten wir mit der Reihendarstellung der Exponentialfunktion

$$\begin{aligned}
\lim_{h\downarrow 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\downarrow 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{(1-e^h)-(1-e^0)}{h}\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1-e^h}{h}\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{1-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{h^k}{k!}}{h}\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{-\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{h^k}{k!}}{h}\\
&= \lim_{h\downarrow 0}\frac{-h-\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{h^k}{k!}}{h}\\
&= \lim_{h\downarrow 0} -1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!}
\end{aligned}$$

Da der Index $k \geq 2$ ist, existiert in der unendlichen Reihe kein absoluter Term ohne h. Wir dürfen, da die Exponentialfunktion absolut konvergiert, den Grenzwert in die Summe ziehen. Damit erhalten wir

$$\lim_{h\downarrow 0} -1-\sum_{k=2}^{\infty}\frac{h^{k-1}}{k!} = -1-\sum_{k=2}^{\infty}\lim_{h\downarrow 0}\frac{h^{k-1}}{k!} = -1-0 = -1.$$

Die Grenzwerte stimmen nicht überein, sodass die Funktion in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

b) Die Funktion $|x|^{1+a}\cdot\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ ist als Komposition differenzierbarer Funktionen auf $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar. Für die Differenzierbarkeit berechnen wir

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{|h|^{1+a}\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)-0}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}|h|^a\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right)
\end{aligned}$$

Mit den Abschätzungen der Sinusfunktion erhalten wir

$$-|h|^a \leq |h|^a\cdot\sin\left(\frac{1}{h}\right) \leq |h|^a.$$

Mit $a > 0$ folgt $\lim\limits_{h\to 0}|h| = \lim\limits_{h\to 0} -|h| = 0$, sodass mit dem Sandwich-Lemma die Behauptung folgt.

Lösung zu Aufgabe 47

a) Da

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0} x = 0$$

liegt ein Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$" vor. Daher leiten wir Zähler und Nenner getrennt voneinander ab und betrachten den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\sin(x)}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = 1.$$

Da dieser Grenzwert existiert, folgt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

b) Da

$$\lim_{x\to 0} \tan(x) - x = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0} x^3 = 0$$

liegt ein Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$" vor. Daher leiten wir Zähler und Nenner getrennt voneinander ab. Die Ableitung des Tangens erhalten wir mit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$ durch

$$\frac{d}{dx}\tan(x) = \frac{d}{dx}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(x) + \sin(x)\cdot\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Damit betrachten wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\tan(x) - x}{\frac{d}{dx}x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos(x)} - 1}{3x^2}$$

Da

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos^2(x)} - 1 = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0} 3x^2 = 0$$

liegt erneut ein Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$" vor. Daher leiten wir Zähler und Nenner erneut getrennt voneinander ab und betrachten den Grenzwert

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\frac{1}{\cos^2(x)} - 1}{\frac{d}{dx}3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cdot\sin(x)}{\cos^3(x)}}{6x}$$

Wiederum ist

$$\lim_{x\to 0} \frac{2\cdot\sin(x)}{\cos^3(x)} = 0 \text{ und } \lim_{x\to 0} 6x = 0,$$

und es liegt ein Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$" vor. Wir sehen, dass die Potenz des Nenners immer kleiner wird, sodass wir einen weiteren Schritt durchführen und Zähler sowie Nenner getrennt voneinander ableiten. Mit der Quotientenregel erhalten wir

$$\frac{d}{dx}\frac{2\cdot\sin(x)}{\cos^3(x)} = \frac{2\cdot\cos(x)\cdot\cos^3(x) + 2\cdot\sin(x)\cdot 3\cdot\cos(x)^2\cdot\sin(x)}{\cos^6(x)}.$$

Diesen vereinfachen wir an dieser Stelle nicht, sondern berechnen direkt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\frac{2\cdot\sin(x)}{\cos^3(x)}}{\frac{d}{dx}6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cdot\cos(x)\cdot\cos^3(x)+2\cdot\sin(x)\cdot 3\cdot\cos(x)^2\cdot\sin(x)}{\cos^6(x)}}{6}$$
$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{2\cdot 1\cdot 1+2\cdot 0\cdot 3\cdot 1\cdot 0}{1}$$
$$= \frac{1}{3}.$$

Da dieser Grenzwert existiert, folgt mit der Regel von L'Hospital sukzessive, dass

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2\cdot\sin(x)}{\cos^3(x)}}{6x} = \frac{1}{3}$$

und damit

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\cos(x)}-1}{3x^2} = \frac{1}{3}$$

und letztlich

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)-x}{x^3} = \frac{1}{3}.$$

c) Auch diese Aufgabe lösen wir mit Hilfe der Regel von L'Hospital. Zunächst schreiben wir die Summe auf einen Bruchstrich, um zu testen, ob wir einen Grenzwert der Form für die Regel von L'Hospital bekommen. Es gilt

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+1}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}.$$

Für den Nenner erhalten wir den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \ln(1) = 0.$$

Betrachten wir den Grenzwert des Zählers, so schreiben wir das Produkt künstlich als Bruch und erhalten

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+1 = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}+1.$$

Da $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$ und wie bereits zuvor gezeigt $\lim_{x\to\infty}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = 0$ gilt, liegt ein Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$“ vor. Leiten wir daher Zähler und Nenner getrennt voneinander ab, so erhalten wir mit

$$\frac{d}{dx}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2-x} = \frac{1}{x\cdot(x-1)}$$

den Ausdruck

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\, x\cdot \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+1}{\frac{d}{dx}\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+x\cdot\frac{1}{x^2-x}}{\frac{1}{x^2-x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-x}}.$$

Betrachten wir hier erneut Zähler und Nenner, so sehen wir, dass für den Zähler

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1} = \ln(1)+0 = 0$$

und für den Nenner

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2-x} = 0$$

gilt, sodass erneut ein Grenzwert der Form „$\frac{0}{0}$“ vorliegt. Leiten wir Zähler und Nenner erneut ab, bestimmen wir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}\right)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x^2-x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2-x}-\frac{1}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{(x^2-x)^2}\cdot(2x-1)}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-\frac{(x^2-x)^2}{(x-1)^2}}{1-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-\frac{(x\cdot(x-1))^2}{(x-1)^2}}{1-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-\frac{x^2\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2}}{1-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^2-x-x^2}{1-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-x}{1-2x}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\frac{1}{x}-2}$$

$$= \frac{-1}{0-2}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

Da dieser Grenzwert existiert, folgt mit der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x-1}}{\frac{1}{x^2-x}} = \frac{1}{2}$$

gilt. Aufgrund dieses Grenzwerts, folgt erneut nach der Regel von L'Hospital, dass

$$\lim_{x\to\infty}\left(x+\frac{1}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x\cdot\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)+1}{\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{2}.$$

d) Bei dieser Aufgabe schreiben wir das Produkt erneut künstlich als Bruch und wenden die Regel von L'Hospital an. Es gilt

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x) = = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}.$$

Da sowohl der Zähler als auch der Nenner gegen $\pm\infty$ divergieren, betrachten wir den Grenzwert der Ableitungen. Es gilt:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0.$$

Damit folgt mit der Regel von L'Hospital

$$\lim_{x\to 0} x\cdot\ln(x) = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 48

Mit dem Mittelwertsatz erhalten wir für $x, y \in [a, b]$

$$\left|\frac{f(x)-f(y)}{x-y}\right| = \left|f'(\xi)\right|$$

mit $\xi \in (x, y)$ beziehungsweise $\xi \in (y, x)$. Da f stetig differenzierbar ist, ist f' stetig auf der kompakte Menge $[a, b]$ und nimmt daher auf der Menge ein Maximum an. Sei c dieses Maximum. Dann folgt:

$$|f(x)-f(y)| = \left|f'(\xi)\right|\cdot|x-y| < \underbrace{|f'(c)|}_{=L}\cdot|x-y|$$

Damit ist f lipschitzstetig.

Lösung zu Aufgabe 49

Wir wenden erneut den Mittelwertsatz an, damit gilt für $\xi \in (x, x+c)$

$$f'(\xi) = \frac{f(x+c)-f(x)}{x+c-x} \Leftrightarrow c\cdot f'(\xi) = f(x+c)-f(x)$$

Da $\xi > x$ ist, strebt auch ξ gegen unendlich, wenn x gegen unendlich geht. Damit erhalten wir

$$\lim_{x\to\infty} f(x+c)-f(x) = \lim_{\xi\to\infty} c\cdot f'(\xi) = c\cdot 0 = 0.$$

Lösung zu Aufgabe 50

a) Für das Intervall berechnen wir die erste Ableitung durch

$$f'(x) = 6x^2 - 30x + 24 = 6 \cdot (x^2 - 5x + 4).$$

Um das Vorzeichen zu klassifizieren, faktorisieren wir die Ableitung und berechnen mittels der *p*-*q*-Formel die Nullstellen:

$$\begin{aligned} & 6 \cdot (x^2 - 5x + 4) &=& 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 - 5x + 4 &=& 0 \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} &=& \frac{5}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 - 4} \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} &=& \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4} \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} &=& \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4}} \\ \Leftrightarrow \quad & x_{1,2} &=& \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2} \end{aligned}$$

Mit den Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ gilt

$$f'(x) = 6 \cdot (x-1) \cdot (x-4).$$

f' ist positiv, wenn entweder beide Faktoren positiv oder beide Faktoren negativ sind. Daraus ergeben sich die Intervalle

$$I_1 = (-\infty, 1] \quad \text{und} \quad I_2 = [4, \infty).$$

b) Bei dieser Teilaufgabe berechnen wir ebenfalls die erste Ableitung mit der Produktregel und erhalten

$$f'(x) = x^2 \cdot e^x + 2x \cdot e^x = e^x \cdot (x+2) \cdot x.$$

Aufgrund der Positivität der Exponentialfunktion, ist die erste Ableitung positiv, wenn beide Faktoren $x+2$ und x positiv oder beide negativ sind. Damit ergeben sich die Intervalle

$$I_1 = (-\infty, -2] \quad \text{und} \quad I_2 = [0, \infty).$$

Lösung zu Aufgabe 51

a) Für die Konvexität berechnen wir die ersten beiden Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x &&= \frac{2x}{1+x^2} \\ f''(x) &= \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} &&= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \end{aligned}$$

Da $(1+x^2)^2$ für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist, faktorisieren wir den Zähler. Es gilt

$$2 - 2x^2 = .\ 2 \cdot (1 - x^2) = 2 \cdot (1-x) \cdot (1+x) = -2 \cdot (x-1) \cdot (x+1)$$

Die Funktion ist konvex, wenn die zweite Ableitung positiv ist. Mit dem negativen Vorzeichen suchen wir den Fall, dass einer der Faktoren negativ und der andere positiv ist. Dies führt zu dem Intervall

$$I = [-1, 1].$$

b) Wir bilden ebenfalls die ersten beiden Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x \cdot e^{x+1} + e^{x+1} &&= (x+1) \cdot e^{x+1} \\ f'(x) &= (x+1) \cdot e^{x+1} + e^{x+1} &&= (x+2) \cdot e^{x+1} \end{aligned}$$

Die Funktion ist konvex, wenn die zweite Ableitung positiv ist. Aufgrund der Positivität der Exponentialfunktion muss also $x+2 > 0$ gelten, sodass wir das Intervall

$$I = [-2, \infty)$$

erhalten.

Lösung zu Aufgabe 52

Für die lokalen und globalen Extrema berechnen wir die erste Ableitung

$$f'(x) = e^{-x^2} + x \cdot e^{-x^2} \cdot (-2x) = (1-2x^2) \cdot e^{-x^2}$$

Wir erhalten die möglichen Kandidaten für lokale Extrema durch die Nullstellen der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} & f'(x) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (1-2x^2) \cdot e^{-x^2} &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & (1-2x^2) &&= 0 \\ \Leftrightarrow\quad & 1 &&= 2x^2 \\ \Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2} &&= x^2 \end{aligned}$$

Damit sind die möglichen Kandidaten $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $x_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}$, welche beide im Definitionsbereich von f liegen. Wir entscheiden uns für eine Untersuchung auf Vorzeichenwechsel und berechnen

$$\begin{aligned} f'(-1) &= (1-2) \cdot e^{-1} &&= -\frac{1}{e} &&< 0 \\ f'(0) &= (1-0) \cdot e^{0} &&= 1 &&> 0 \\ f'(1) &= (1-2) \cdot e^{1} &&= -e &&< 0 \end{aligned}$$

Damit liegt für den Kandidaten x_1 ein Vorzeichenwechsel von < 0 nach > 0 vor, sodass an der Stelle $x = -\sqrt{\frac{1}{2}}$ ein lokales Minimum vorliegt. Analog erhalten wir an der Stelle $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ durch einen Vorzeichenwechsel von > 0 nach < 0 ein lokales Maximum.

Um die Funktion auf globale Extrema zu untersuchen benötigen wir neben den lokalen Extrempunkten noch die Funktionswerte an den Rändern. Wir berechnen die Funktionswerte der Ränder

$$f(-1) = -\frac{1}{e} \quad \text{und} \quad f(2) = 2 \cdot e^{-4}.$$

sowie die Funktionswerte der Extrema

$$f\left(-\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad f\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

Vergleichen wir alle Funktionswerte, so erkennen wir, dass die lokalen Extrema auch die globalen Extrempunkte sind.

1.6 zu Potenzreihen

Lösung zu Aufgabe 53

a) Wir berechnen entsprechend der Definition der Cauchy-Hadamard-Formel für $a_k = 2^k + 3^k$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|2^k + 3^k|}$$

Diese Art von Grenzwerten ist uns bestens bekannt, sodass wir die Abschätzungen

$$3 = \sqrt[k]{3^k} < \sqrt[k]{2^k + 3k} < \sqrt{3^k + 3^k} = \sqrt[k]{2 \cdot 3^k} = 3 \cdot \sqrt[k]{2}$$

treffen. Bilden wir auf beiden Seiten den Grenzwert k gegen unendlich, so folgt mit $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{2} = 1$ und dem Sandwich-Lemma, dass

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{2^k + 3^k} = 3$$

gilt. Damit erhalten wir den Konvergenzradius

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{3}.$$

b) Im zweiten Beispiel berechnen wir mit $a_k = \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)^{k^2}$

$$\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|} = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left|\left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)^{k^2}\right|}$$

$$= \limsup_{k\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)^k$$

Anhand der $(-1)^k$ vermuten wir zwei Häufungspunkte und betrachten daher die Teilfolgen (a_{2k}) und (a_{2k+1}) und berechnen:

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \left(1 + \tfrac{(-1)^{2k}}{2k}\right)^{2k} &= \lim_{k\to\infty} \left(1 + \tfrac{1}{2k}\right)^{2k} &= e \quad \text{und} \\ \lim_{k\to\infty} \left(1 + \tfrac{(-1)^{2k+1}}{2k+1}\right)^{2k+1} &= \lim_{k\to\infty} \left(1 - \tfrac{1}{2k}\right)^{2k} &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

Damit ist

$$\limsup_{k\to\infty} \left(1 + \frac{(-1)^k}{k}\right)^k = e$$

und wir erhalten

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{e}.$$

Lösung zu Aufgabe 54

a) Entsprechend der Eulerformel berechnen wir für $a_k = \frac{1}{k}$

$$r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{k} = \lim_{k\to\infty} 1+\frac{1}{k} = 1.$$

b) Auch hier wenden wir die Berechnungsformel des Konvergenzradius an und erhalten mit $a_k = \frac{k!}{n!\cdot(k-n)!}$

$$\begin{aligned} r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{k!}{n!\cdot(k-n)!}}{\frac{(k+1)!}{n!\cdot(k+1-n)!}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{n!\cdot(k+1-n)!}{(k+1)!}\cdot\frac{k!}{n!\cdot(k-n)!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{n!}{n!}\cdot\frac{(k+1-n)!}{(k-n)!}\cdot\frac{k!}{(k+1)!} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1-n}{k+1} \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{1+\frac{1}{k}-\frac{n}{k}}{1+\frac{1}{k}} \\ &= \frac{1+0-0}{1+0} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 55

a) Da in der Summationsvorschrift der Potenzreihe ein Fakultät auftritt, wählen wir zur Bestimmung des Konvergenzradius' die Euler-Formel und berechnen für $a_k = \frac{1}{(k!)^2}$:

$$\begin{aligned} r = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right| &= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{1}{(k!)^2}}{\frac{1}{((k+1)!)^2}}\right| \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{((k+1)!)^2}{(k!)^2} \\ &= \lim_{k\to\infty} (k+1)^2 \\ &= \infty. \end{aligned}$$

Da der Konvergenzradius unendlich ist, konvergiert die Potenzreise für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Aufgrund der Potenz entscheiden wir uns an dieser Stelle für die Cauchy-Hadamard-Formel und berechnen mit $a_k = 2^k$

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|a_k|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{|2^k|}} = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} 2} = \frac{1}{2}.$$

Das Besondere an dieser an dieser Aufgabe ist, dass im Exponenten der Variablen nicht k, sondern $2k$ steht. Dies bedeutet, dass die Reihe für alle $x \in \mathbb{R}$ mit

$$|x-1|^2 < r$$

konvergiert. Dies führt in unserem Beispiel zu

$$|x-1|^2 < \frac{1}{2} \Leftrightarrow |x-1| < \sqrt{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow 1-\sqrt{\frac{1}{2}} < x < 1+\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Für die Ränder $x = 1-\sqrt{\frac{1}{2}}$ und $x = 1+\sqrt{\frac{1}{2}}$ können wir mit dem Konvergenzradius keine Aussage treffen, und betrachten daher die Reihen in den entsprechenden Fällen.

Sei $x = 1 \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$, so folgt

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot (x-1)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\pm\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{2k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

sodass an beiden Rändern keine Konvergenz vorliegt.

Lösung zu Aufgabe 56

a) Um eine Vermutung über die Ableitungen zu erhalten, berechnen wir die ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3\cdot\cos(x) \\ f''(x) &= -3^2\cdot\sin(x) \\ f'''(x) &= -3^3\cdot\cos(x) \\ f''''(x) &= 3^4\cdot\sin(x) \end{aligned}$$

Wir vermuten daher folgende allgemeine Formel für die Ableitung in der wir in gerade ($n = 2k$) und ungerade ($n = 2k+1$) unterscheiden:

$$\begin{aligned} f^{(2k)}(x) &= (-1)^k\cdot 3^{2k}\cdot\sin(3x) \\ f^{(2k+1)}(x) &= (-1)^k\cdot 3^{2k+1}\cdot\cos(3x) \end{aligned}$$

Dies beweisen wir per vollständiger Induktion:

- **Induktionsanfang:** $k = 0$
  Für $k = 0$ erhalten wir zum Einen

$$f(x) = f^{(2\cdot 0)}(x) = (-1)^0\cdot 3^{2\cdot 0}\cdot\sin(3x) = \sin(3x) \quad \checkmark$$

  und zum Anderen

$$f'(x) = f^{(2\cdot 0+1)}(x) = (-1)^0\cdot 3^{2\cdot 0+1}\cdot\cos(3x) = 3\cdot\cos(3x) \quad \checkmark$$

- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $k \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $k \to k+1$
  Betrachten wir zunächst den Fall für n gerade:

$$\begin{aligned}
f^{(2(k+1))}(x) &= f^{(2k+2)}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f^{(2k)}(x) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} (-1)^k \cdot 3^{2k} \cdot \sin(3x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (-1)^k \cdot 3^{2k} \cdot (3 \cdot \cos(3x)) \\
&= (-1)^k \cdot 3^{2k} \cdot (-3^2 \cdot \sin(3x)) \\
&= (-1)^{k+1} \cdot 3^{2k+2} \cdot \sin(3x) \\
&= (-1)^{k+1} \cdot 3^{2(k+1)} \cdot \sin(3x) \quad \surd
\end{aligned}$$

  Für n ungerade ergibt sich analog:

$$\begin{aligned}
f^{(2(k+1)+1)}(x) &= f^{(2k+3)}(x) \\
&= \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} f^{(2k+1)}(x) \\
&\overset{\text{I.V.}}{=} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} (-1)^k \cdot 3^{2k+1} \cdot \cos(3x) \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (-1)^k \cdot 3^{2k+1} \cdot (-3 \cdot \sin(3x)) \\
&= (-1)^k \cdot 3^{2k+1} \cdot (-3^2 \cdot \cos(3x)) \\
&= (-1)^{k+1} \cdot 3^{2k+3} \cdot \cos(3x) \\
&= (-1)^{k+1} \cdot 3^{2(k+1)+1} \cdot \cos(3x) \quad \surd
\end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine Darstellung der Ableitung bewiesen. Setzen wir den Entwicklungspunkt ein ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f^{(2k)}(0) &= (-1)^k \cdot 3^{2k} \cdot \sin(0) &&= 0 \\
f^{(2k+1)}(0) &= (-1)^k \cdot 3^{2k+1} \cdot \cos(0) &&= (-1)^k \cdot 3^{2k+1}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich die Taylorreihe

$$T_{f(x,0)} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{3^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}.$$

Wir erhalten das gleiche Ergebnis, wenn wir in die bekannte Potenzreihe der Sinusfunktion x mit $3x$ substituieren und 0 einsetzen.

b) Zunächst bilden wir erneut die ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned} f'(x) &= x\cdot e^x + e^x &&= (x+1)\cdot e^x \\ f''(x) &= (x+1)\cdot e^x + e^x &&= (x+2)\cdot e^x \\ f'''(x) &= (x+2)\cdot e^x + e^x &&= (x+3)\cdot e^x \end{aligned}$$

Wir vermuten die allgemeine Darstellung

$$f^{(n)}(x) = (x+n)\cdot e^x$$

und beweisen diese per vollständiger Induktion:

- **Induktionsanfang:** $n = 0$
  Für $n = 0$ erhalten wir
  $$f(x) = f^{(0)}(x) = (x+0)\cdot e^x = x\cdot e^x \quad \checkmark$$
- **Induktionsvoraussetzung:** Die Behauptung gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.
- **Induktionsschritt:** $n \to n+1$
  Wir stellen die $n+1$-te Ableitung wieder als Ableitung der n-ten Ableitung dar und wenden die Induktionsvoraussetzung an. Damit gilt

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{(n)}(x) \overset{\text{I.V.}}{=} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x+n)\cdot e^x = (x+n)\cdot e^x + e^x = (x+n+1)\cdot e^x \quad \checkmark$$

Damit ist die allgemeine Darstellung bewiesen. Setzen wir für $n \geq 1$ den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ ein, erhalten wir

$$f^{(n)}(0) = (0+n)\cdot e^x = n.$$

Für $n = 0$ ist $f^{(0)}(0) = f(0) = 0$, sodass der Summand verschwindet. Damit ergibt sich die Taylorreihe

$$T_{f(x,0)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot (x-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n-1)!}\cdot x^n$$

Lösung zu Aufgabe 57

a) Zunächst bestimmen wir die ersten drei Ableitungen. Die ersten beiden benötigen wir für das Taylorpolynom zweiten Grades und die dritte für die Fehlerabschätzung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}\cdot(2x+2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2 &&= (2x+2)^{-\frac{1}{2}} \\ f''(x) &= -\frac{1}{2}\cdot(2x+2)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2 &&= -(2x+2)^{-\frac{3}{2}} \\ f'''(x) &= \frac{3}{2}\cdot(2x+2)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2 &&= 3\cdot(2x+2)^{-\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

Setzen wir den Entwicklungspunkt in die ersten beiden Ableitungen ein, ergibt sich

$$f'(0) = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{und} \quad f''(0) = -(2)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{8}} = \frac{1}{2\cdot\sqrt{2}}.$$

Damit erhalten wir das Taylorpolynom zweiten Grades

$$\begin{aligned} T^2_{f(x,0)} &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}\cdot(x-0) + \frac{f''(0)}{2!}\cdot(x-0)^2 \\ &= \sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot x - \frac{1}{4\cdot\sqrt{2}}\cdot x^2 \end{aligned}$$

Den maximalen Fehler, den wir dabei an der Stelle $x = 1$ machen können, erhalten wir durch

$$R^2_{f(1,0)} = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (1-0)^3 = \frac{3}{6} \cdot (2\xi + 2)^{-\frac{5}{2}}.$$

Da $\xi \in [0, 1]$ liegt, schätzen wir das Restglied wie folgt ab:

$$R^2_{f(1,0)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(2\xi + 2)^{\frac{5}{2}}} < \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(0+2)^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{8 \cdot \sqrt{2}}.$$

b) Wir bilden erneut die ersten drei Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x &&= \frac{2x}{1+x^2} \\
f''(x) &= \frac{2 \cdot (1+x^2) - 2x \cdot 2x}{(1+x^2)^2} &&= \frac{2-2x^2}{(1+x^2)^2} \\
f'''(x) &= \frac{(-4x) \cdot (1+x^2)^2 - (2-2x^2) \cdot 2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^4} &&= \frac{4x^3 - 12x}{(1+x^2)^3}
\end{aligned}$$

Setzen wir den Entwicklungspunkt in die ersten beiden Ableitungen ein, erhalten wir

$$f'(0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(0) = 2.$$

Damit ergibt sich das Taylorpolynom zweiten Grades durch

$$\begin{aligned}
T^2_{f(x,0)} &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!} \cdot (x-0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x-0)^2 \\
&= \ln(1) + 0 \cdot x + \frac{2}{2} \cdot x^2 \\
&= x^2
\end{aligned}$$

Den maximalen Fehler, den wir an der Stelle 1 erhalten können, erhalten wir durch

$$R^2_{f(1,0)} = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (1-0)^3 = \frac{1}{6} \cdot \frac{4\xi^3 - 12\xi}{(1+\xi^2)^3}.$$

Möchten wir an dieser Stelle möglichst scharf sein, so bietet es sich an, das globale Maximum auf $[0, 1]$ mit den Methoden der Differentialrechnung zu berechnen. Da dies sehr viel Rechenaufwand benötigt, schätzen wir an dieser Stelle etwas großzügiger ab:

$$R^2_{f(1,0)} = \frac{1}{6} \cdot \frac{4\xi^3 - 12\xi}{(1+\xi^2)^3} < \frac{1}{6} \cdot \frac{4 \cdot 1 - 12 \cdot 0}{(1+0)^3} = \frac{2}{3}.$$

(Der exakte maximale Fehler liegt bei ungefähr 0,4857)

1.7 zu Das Riemann-Integral

Lösung zu Aufgabe 58

Wie im Beispiel im Heft betrachten wir die Zerlegung

$$\Delta_n = \left(0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right).$$

Damit ist die Differenz zweier aufeinanderfolgender Stützstellen

$$x_{i+1} - x_i = \frac{i+1}{n} - \frac{i}{n} = \frac{1}{n}.$$

Da die Funktion $f(x) = x + 1$ auf $[0, 1]$ monoton wachsend ist, gilt zudem

$$\max_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_{i+1}) = x_{i+1} + 1 \quad \text{und} \quad \min_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) = f(x_i) = x_i + 1.$$

Damit erhalten wir die Obersumme durch:

$$\begin{aligned}
O(\Delta_n, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \sup_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot (x_{i+1} + 1) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i+1}{n} + 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} (i+1) + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \overbrace{\left(\frac{1}{n} \cdot (n - 1 - 0 + 1) \cdot 1\right)} \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + 1 \\
&= \frac{1 + \frac{1}{n^2}}{2} + 1
\end{aligned}$$

Analog berechnen wir die Untersumme:

$$\begin{aligned}
U(\Delta_n, f) &= \sum_{i=0}^{n-1} (x_{i+1} - x_i) \cdot \inf_{x \in [x_i, x_{i+1}]} f(x) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{i}{n} + 1\right) \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} i + \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} 1 \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} + \left(\frac{1}{n} \cdot (n - 1 - 0 + 1) \cdot 1\right) \\
&= \frac{1 - \frac{1}{n^2}}{2} + 1
\end{aligned}$$

Aufgrund von

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} O(\Delta_n, f) - U(\Delta_n, f) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2} + 1 - \frac{1-\frac{1}{n^2}}{2} + 1 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \\ &= 0\end{aligned}$$

ist f riemannintegrierbar und wir berechnen das Integral durch

$$\int_0^1 x+1 \,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} O(\Delta_n, f) = \lim_{n\to\infty} U(\Delta_n, f) = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}.$$

Lösung zu Aufgabe 59

a) Mit Hilfe der Summenregel gilt für $c \in \mathbb{R}$

$$\int x^4 + x^2 + 1 \,\mathrm{d}x = \int x^4 \,\mathrm{d}x + \int x^2 \,\mathrm{d}x + \int 1 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^3 + x + c.$$

b) Mit Hilfe der Summenregel und der Linearität des Integrals erhalten wir

$$\int \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x + \int x^{-2} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot \ln|x| - \frac{1}{x} + c.$$

Dabei setzen wir die Betragsstriche bei Unkenntnis der Vorzeichen der Grenzen.

Lösung zu Aufgabe 60

a) Wir berechnen direkt

$$\int_0^2 e^{-3x+1} \,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3} \cdot e^{-3x+1}\right]_0^2 = -\frac{1}{3} \cdot e^{-5} + \frac{1}{3} \cdot e^{1}.$$

b) Wir berechnen ebenfalls direkt

$$\int_0^1 \sqrt{1+x} - \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3} \cdot (1+x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 - \left[\frac{2}{3} \cdot (x)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} - \left(\frac{2}{3} - 0\right) = \frac{2}{3} \cdot (\sqrt{8} - 2).$$

Lösung zu Aufgabe 61

a) Zunächst führen wir die Partialbruchzerlegung durch. Wir suchen $A, B \in \mathbb{R}$, sodass mit $x^2 - 1 = (x-1) \cdot (x+1)$

$$\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} = \frac{A \cdot (x+1) + B \cdot (x-1)}{x^2-1} = \frac{(A+B) \cdot x + (A-B)}{x^2-1}$$

gilt. Mit Koeffizientenvergleich folgt

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ A - B &= 2 \end{aligned}$$

Addieren wir die erste auf die zweite Zeile ergibt sich

$$\begin{array}{rcrcl} A & + & B & = & 0 \\ 2A & - & 0 & = & 2 \end{array}$$

und wir erhalten aus der zweiten Zeile $2A = 2 \Leftrightarrow A = 1$, sodass $B = -1$ folgt.

Insgesamt berechnen wir das Integral wie folgt:

$$\int \frac{2}{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x - \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x = \ln|x-1| - \ln|x+1| + c$$

b) Wir führen erneut die Partialbruchzerlegung durch. Dazu suchen wir $A, B, C \in \mathbb{R}$, sodass

$$\begin{aligned} \frac{4x^2 - 16x + 14}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} \\ &= \frac{A\cdot(x-2)\cdot(x-3) + B\cdot(x-1)\cdot(x-3) + C\cdot(x-1)\cdot(x-2)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} \\ &= \frac{A\cdot(x^2-5x+6) + B\cdot(x^2-4x+3) + C\cdot(x^2-3x+2)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} \\ &= \frac{(A+B+C)\cdot x^2 - (5A+4B+3C) + (6A+3B+2C)}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)} \end{aligned}$$

gilt. Mit Koeffizientenvergleich erhalten wir das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcrcrcl} A & + & B & + & C & = & 4 \\ 5A & + & 4B & + & 3C & = & 16 \\ 6A & + & 3B & + & 2C & = & 14 \end{array}$$

Ziehen wir das Fünffache der ersten von der zweiten sowie das Sechsfache der ersten von der dritten Zeile ab folgt:

$$\begin{array}{rcrcrcr} A & + & B & + & C & = & 4 \\ 0 & + & -B & + & -2C & = & -4 \\ 0 & + & -3B & + & -4C & = & -10 \end{array}$$

Ziehen wir nun das Dreifache der zweiten von der dritten Zeile ab ergibt sich:

$$\begin{array}{rcrcrcr} A & + & B & + & C & = & 4 \\ 0 & + & -B & + & -2C & = & -4 \\ 0 & + & 0 & + & 2C & = & 2 \end{array}$$

Aus der dritten Zeile berechnen wir $C = 1$. Damit folgt aus der zweiten Zeile $B = 2$ und letztlich aus der ersten Zeile $A = 1$.

Insgesamt berechnen wir das Integral durch

$$\begin{aligned} \int \frac{4x^2 - 16x + 14}{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{x-1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{2}{x-2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{x-3}\,\mathrm{d}x \\ &= \ln|x-1| + 2\ln|x-2| + \ln|x-3| + c. \end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 62

a) Wir berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-x}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[-e^{-x}\right]_0^b\\ &= \lim_{b\to\infty} 1-e^{-b}\\ &= 1-0\\ &= 1.\end{aligned}$$

Das uneigentliche Integral existiert.

b) Das uneigentliche Integral existiert nicht, da

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x|$$

und

$$\lim_{x\to 1}\ln(x) = \infty.$$

c) Für $c = 1$ haben wir bereits gezeigt, dass das Integral nicht existiert. Sei also $c > 0$ und $c \neq 1$, so berechnen wir

$$\begin{aligned}\int_1^\infty \frac{1}{x^c}\,\mathrm{d}x &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^c}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b x^{-c}\,\mathrm{d}x\\ &= \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-c}\cdot x^{1-c}\right]_1^b\\ &= \frac{1}{1-c}\cdot\left(\lim_{b\to\infty} b^{1-c}-1\right)\end{aligned}$$

Wir erkennen, dass $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-c} = 0$ für $c > 1$ und $\lim\limits_{b\to\infty} b^{1-c} = \infty$ für $c < 1$ ist, sodass das uneigentliche Integral für $c > 1$ existiert.

d) Wir würden mit den Grenzen $a = 1$ und $b = 5$ über eine Definitionslücke in $x = 2$ hinweg integrieren. Da dies nicht erlaubt ist, splitten wir das Integral an der Stelle $x = 2$ in zwei uneigentliche Integrale auf und addieren diese. Es gilt

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx + \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx$$

wir nähern uns somit der Definitionslücke $x = 2$von unten sowie von oben und berechnen im Folgenden die Integrale

$$\lim_{b\to 2}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx$$

sowie

$$\lim_{a\to 2}\int_a^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx.$$

Für das erste Integral ist x immer kleiner als 2, sodass wir den Betrag unter der Wurzel mit „$-$" auflösen. In diesem Fall gilt $|x-2| = -(x-2) = 2-x$. Es folgt

$$\lim_{b\to 2}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx = \lim_{b\to 2}\int_1^b \frac{1}{\sqrt{2-x}}\,dx = \lim_{b\to 2}\int_1^b (2-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{b\to 2}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot(2-x)^{-\frac{1}{2}+1}\cdot(-1)\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to 2}\left[(-2)\cdot\sqrt{2-x}\right]_1^b = \lim_{b\to 2}(-2)\cdot\sqrt{2-b}+2\cdot\sqrt{2-1} = 2.$$

Für das zweite Integral ist x stets größer als 2, sodass wir den Betrag positiv auflösen. Es folgt also $|x-2| = x-2$. Es folgt

$$\lim_{a\to 2}\int_a^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx = \lim_{a\to 2}\int_a^5 \frac{1}{\sqrt{x-2}}\,dx = \lim_{a\to 2}\int_a^5 (x-2)^{-\frac{1}{2}}\,dx = \lim_{a\to 2}\left[\frac{1}{-\frac{1}{2}+1}\cdot(x-2)^{-\frac{1}{2}+1}\right]_a^5$$

$$= \lim_{a\to 2}\left[2\cdot\sqrt{x-2}\right]_a^5 = \lim_{a\to 2}2\cdot\sqrt{5-2}-2\cdot\sqrt{a-2} = 2\cdot\sqrt{3}.$$

Insgesamt folgt, dass das uneigentliche Integral existiert und

$$\int_1^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx + \int_2^5 \frac{1}{\sqrt{|x-2|}}\,dx = 2+2\cdot\sqrt{3}$$

Lösung zu Aufgabe 63

a) Wir interpretieren das Integral zunächst als Produkt, sodass wir die partielle Integration anwenden können:

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \int \cos(x)\cdot\cos^2(x)\,\mathrm{d}x$$

Da wir nicht ohne Weiteres eine Stammfunktion von $\cos^2(x)$ angeben können, wählen wir $u'(x) = \cos(x)$ und $v(x) = \cos^2(x)$. Damit berechnen wir

$$\int \cos(x)\cdot\cos^2(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \overbrace{\sin(x)}^{=u(x)}\cdot\cos^2(x) - \int \underbrace{\sin(x)}_{=u(x)}\cdot\overbrace{2\cdot\cos(x)\cdot(-sin(x))}^{=v'(x)}\,\mathrm{d}x$$

$$=\; \sin(x)\cdot\cos^2(x)+2\cdot\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x.$$

Für das neu entstandene Integral wenden wir erneut die partielle Integration an. Dabei wählen wir aus gleichen Gründen $v(x) = \sin^2(x)$ und $u'(x) = \cos(x)$. Damit erhalten wir

$$\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sin^2(x)\cdot\sin(x) - \int 2\cdot\sin(x)\cdot\cos(x)\cdot\sin(x)\,\mathrm{d}x$$

$$=\; \sin^3(x) - \int 2\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x$$

.

Wir sehen, dass das gleiche Integral, mit dem wir gestartet haben, auch auf der rechten Seite auftritt, addieren wir dieses nach links erhalten wir

$$3\cdot\int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sin^3(x) \;\Leftrightarrow\; \int \sin^2(x)\cdot\cos(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \frac{1}{3}\cdot\sin^3(x).$$

Damit folgt insgesamt

$$\int \cos^3(x)\,\mathrm{d}x \;=\; \sin(x)\cdot\cos^2(x)+\frac{2}{3}\cdot\sin^3(x)+c.$$

b) Im zweiten Beispiel wählen wir $v(x) = x^2$ und $u'(x) = e^{-x}$, da wir uns erhoffen, dass der Grad des Monoms x^2 dadurch kleiner wird. Es gilt:

$$\begin{aligned}\int x^2 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x &= x^2 \cdot \overbrace{\left(-e^{-x}\right)}^{=u(x)} - \int \underbrace{2x}_{=v'(x)} \cdot \overbrace{\left(-e^{-x}\right)}^{=u(x)}\,\mathrm{d}x \\ &= -x^2 \cdot e^{-x} + 2 \cdot \int x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Für das neu entstandene Integral wenden wir erneut die partielle Integration an und erhalten mit $v(x) = x$ und $u'(x) = e^{-x}$

$$\begin{aligned}\int x \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x &= x \cdot \left(-e^{-x}\right) - \int 1 \cdot \left(-e^{-x}\right)\,\mathrm{d}x \\ &= -x \cdot e^{-x} - e^{-x}.\end{aligned}$$

Insgesamt folgt daraus

$$\int x^2 \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x = -x^2 \cdot e^{-x} - 2x \cdot e^{-x} - 2e^{-x} + c = -e^{-x} \cdot (x^2 + 2x + 2) + c$$

Lösung zu Aufgabe 64

a) Mit der angegebenen Substitution erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\sin(x) \quad\Leftrightarrow\quad -\mathrm{d}u = \sin(x)\,\mathrm{d}x.$$

Damit erhalten wir

$$\int \sin(x) \cdot e^{\cos(x)}\,\mathrm{d}x = \int -e^u\,\mathrm{d}u = -e^u + c = -e^{\cos(x)} + c.$$

b) An dieser Stelle betrachten wir zunächst die Ableitung des Tangens mit Hilfe der Quotientenregel und berechnen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tan(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \frac{\sin^2(x) + \cos^2(x)}{\cos^2(x)} = \tan^2(x) + 1.$$

Damit erhalten wir aus der Substitution

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = 1 + \tan^2(u) \quad\Leftrightarrow\quad \mathrm{d}x = \left(1 + \tan^2(u)\right)\,\mathrm{d}u.$$

Setzen wir $x = \tan(u)$ mit obiger Rechnung ins Integral ein, ergibt sich

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{1+\tan^2(u)} \cdot \left(1 + \tan^2(u)\right)\,\mathrm{d}u = \int 1\,\mathrm{d}u = u + c = \arctan(x) + c.$$

Dabei ist $\arctan(x)$ die Umkehrfunktion des Tangens.

Lösung zu Aufgabe 65

a) Im ersten Fall interpretieren wir $\ln(x)$ künstlich als das Produkt $1 \cdot \ln(x)$ und wenden die partielle Integration an. Dabei wählen wir $u'(x) = x$ und $v(x) = \ln(x)$, da wir zwar durch das Integrieren von 1 einen „schlimmeren“ Term x erhalten, so jedoch den Logarithmus loswerden. Es gilt:

$$\int \ln(x)\,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln(x)\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \int x \cdot \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - \sin 1\,\mathrm{d}x = x \cdot \ln(x) - x + c.$$

b) Diese Substitution ist äußerst schwierig zu finden und bedarf einiger Zeit des Ausprobierens. Wir substituieren $x = \sin(u)$. Damit erhalten wir

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u} = \cos(u) \Leftrightarrow x = \cos(u)\,\mathrm{d}u$$

und berechnen mit $\sin^2(u)+\cos^2(u)=1$

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int \sqrt{1-\sin^2(u)}\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = \int \sqrt{\cos^2(u)}\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = \int |\cos(u)|\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u.$$

Da die Wurzel nur für $x \in [-1,1]$ definiert ist, ist $\cos(u)$ stets positiv und wir können den Betrag weglassen. Das so entstandene Integral lösen wir mit Hilfe der partiellen Integration durch

$$\int \cos(u)\cdot\cos(u)\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cdot\cos(u) - \int \sin(u)\cdot(-\sin(u))\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cdot\cos(u) + \int \sin^2(u)\,\mathrm{d}u.$$

Wenden wir nun $\sin^2(u) = 1-\cos^2(u)$ an, so ergibt sich

$$\int \cos(u)\cdot\cos(u) = \sin(u)\cdot\cos(u) + \int 1-\cos^2(u)\,\mathrm{d}u = \sin(u)\cdot\cos(u) + u - \int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$$

Addieren wir auf beiden Seiten $\int \cos^2(u)\,\mathrm{d}u$ erhalten wir die Lösung

$$\int \cos(u)\cdot\cos(u) = \frac{1}{2}\cdot\sin(u)\cdot\cos(u) + \frac{u}{2}.$$

Damit folgt insgesamt

$$\int \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(x\cdot\cos(\arcsin(x)) + \arcsin(x)\right).$$

An dieser Stelle nicht gefordert, aber dennoch interessant - ist der Zusammenhang

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}.$$

Lösung zu Aufgabe 66

a) Um den tatsächlichen Flächeninhalt zu berechnen, benötigen wir die Nullstellen der Funktion f im Intervall $[-2,3,]$. Dazu berechnen wir

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - x = 0 \Leftrightarrow x\cdot(x^2-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 1 \vee x = -1.$$

Da alle drei Nullstellen im Intervall liegen berechnen wir

$$\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_{-2}^{-1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{0}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{1}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x\right|.$$

Durch die Betragsstriche gehen wir sicher, dass wir die Fläche positiv werten. Als Stammfunktion erhalten wir

$$\int x^3 - x\,\mathrm{d}x = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} = F(x)$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x &= |F(-1)-F(-2)|+|F(0)-F(-1)|+|F(1)-F(0)|+|F(3)-F(1)| \\
&= \left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-(4-2)\right|+\left|0-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right|+\left|\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-0\right|+\left|\frac{81}{4}-\frac{9}{2}-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)\right| \\
&= \left|-\frac{9}{4}\right|+\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{1}{4}\right|+\left|\frac{64}{4}\right| \\
&= \frac{9}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+16 \\
&= 18\,\frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

b) Im zweiten Fall benötigen wir die Schnittstellen der Sinus- und Cosinusfunktion. Da es keine gleichzeitige Nullstelle der beiden trigonometrischen Funktionen gibt, können wir ohne Weiteres durch $\cos(x)$ dividieren und erhalten

$$\tan(x) = 1.$$

Da der Tangens periodisch auf den Intervallen $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ und $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}$ existieren zwei Lösungen der Gleichung:

$$x_1 = \frac{\pi}{4} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{5\pi}{4}$$

Daher berechnen wir

$$\int_0^{2\pi} \sin(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x = \left|\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \sin(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

Mit der Stammfunktion

$$\int \sin(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x = -\cos(x)-\sin(x)$$

erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} \sin(x)-\cos(x)\,\mathrm{d}x &= \left|F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)\right|+\left|F\left(\frac{5\pi}{4}\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)\right|+\left|F(2\pi)-F\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right| \\
&= \left|1-\sqrt{2}\right|+\left|2\cdot\sqrt{2}\right|+\left|-1-\sqrt{2}\right| \\
&= \sqrt{2}-1+2\cdot\sqrt{2}+1+\sqrt{2} \\
&= 4\cdot\sqrt{2}.
\end{aligned}$$

Lösung zu Aufgabe 67

a) Zunächst betrachten wir die Funktionenfolge auf punktweise Konvergenz. Zuerst betrachten wir den Fall $x = 0$. So gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} 1 = 1.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \neq 0$ folgt indessen

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+n\cdot|x|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}+\cdot|x|} = \frac{0}{0+|x|} = 0.$$

Insgesamt gilt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}.$$

Da $f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stetig ist, die Grenzfunktion f aber unstetig an der Stelle $x = 0$, kann f_n nicht gleichmäßig konvergieren.

b) In diesem Fall konvergiert f_n nicht punktweise gegen eine Grenzfunktion f, da beispielsweise für $x = 1$ der Ausdruck $f_n(1) = \sin(n)$ unbestimmt divergiert. Da die Funktionenfolge nicht punktweise für alle $x \in \mathbb{R}$ konvergiert, kann sie auch nicht gleichmäßig konvergieren.

Lösung zu Aufgabe 68

Betrachten wir zunächst den Fall $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$:
Zunächst starten wir erneut mit $x = 0$ und erhalten

$$\lim_{n\to\infty} f_n(0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot 0}{1 + n^2 \cdot 0^2} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Für $x \neq 0$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{nx}{1 + n^2 \cdot x^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \cdot x^2} = \frac{0}{0 + x^2} = 0.$$

Die Funktionenfolge konvergiert daher punktweise gegen die Nullfunktion, welche stetig ist.

Dennoch liegt keine gleichmäßige Konvergenz vor, denn für $x = \frac{1}{n}$ folgt

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Somit finden wir kein n_0, sodass für alle x - also auch $x = \dfrac{1}{n}$ - und alle $n \geq n_0$ der Abstand

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{2}$$

kleiner als ε für $\varepsilon < \dfrac{1}{2}$ wird.

Betrachten wir nun den Fall $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$:
Die punktweise Konvergenz funktioniert analog. Für die gleichmäßige Konvergenz berechnen wir

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x)| = \left| \frac{n \cdot x}{1 + n^2 \cdot x^2} \right| = \left| \frac{1}{\frac{1}{nx} + nx} \right| < \frac{1}{nx} \overset{x \geq 1}{\leq} \frac{1}{n}.$$

Dieser Abstand geht unabhängig von x gegen 0, sodass die Funktionenfolge auf $[1, \infty)$ gleichmäßig gegen die Nullfunktion konvergiert.