# Beispiel Fallschirmspringer (NEU)

Ein Fallschirmspringer erreicht nach einer Fallstrecke $h$ seine konstante Endgeschwindigkeit. Wie groß ist diese, wenn die Beschleunigung mit $a_{(x)} = g\left(1 - \frac{x}{h}\right)$ beschrieben wird?

$h = 300\,m$, $g = 9{,}81 \frac{m}{s^2}$, $0 \leq x \leq h$

$$a_{(x)} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dv}{dx}\, v$$

$$a_{(x)}\, dx = g\left(1 - \frac{x}{h}\right) dx = v\, dv \quad \Big| \int$$

$$\int_{x=0}^{x} g\left(1 - \frac{x}{h}\right) dx = \int_{v=0}^{v} v\, dv$$

$$g\left(x - \frac{x^2}{2h}\right) = \frac{1}{2} v^2$$

$$V_{(x)} = \sqrt{2g\left(x - \frac{x^2}{2h}\right)}$$

$$V_{(x=h)} = \sqrt{2g\left(h - \frac{h^{\cancel{2}}}{2\cancel{h}}\right)} = \sqrt{\cancel{2}g\frac{h}{\cancel{2}}} = \sqrt{g \cdot h} \approx 195\,\frac{km}{h}$$

# Übungsaufgabe: Kinematische Grundgrößen Aufgabe 1.2

In einem Physikexperiment bewegt sich ein Körper Linear entlang einer Achse mit einer Beschleunigung $a = k \cdot \sqrt{v}$. Zum Zeitpunkt der ersten Messung $t_1 = 0\,s$ hat der Körper eine Strecke $x_1 = 0{,}5\,m$ zurückgelegt und besitzt die Geschwindigkeit $v_1 = 2{,}5\,\frac{m}{s}$.

An welcher Stelle $x$ befindet sich der Körper nach $t_2 = 3\,s$? Wie groß ist die Geschwindigkeit und die Beschleunigung bei $x$?

$\left(k = 1\sqrt{\frac{m}{s^3}} = \text{konst.}\right)$

$$a = a_{(v)} = \frac{dv}{dt} \qquad \Big| \cdot dt \quad \Big| : a_{(v)}$$

$$1\,dt = \frac{1}{a_{(v)}}\,dv = \frac{1}{k \cdot \sqrt{v}}\,dv \qquad \Big| \int(\ldots)$$

$$\int_{t_1=0}^{t} 1\,dt = \int_{v_1}^{v} \frac{1}{k \cdot \sqrt{\bar{v}}}\,d\bar{v} \qquad \Big| NR: \int \frac{1}{\sqrt{v}}\,dv = \int v^{-\frac{1}{2}}\,dv = 2\,v^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{v}$$

$$t = \frac{1}{k} \cdot 2 \cdot \sqrt{v}\,\Big|_{v_1}^{v} = \frac{2}{k}\left(\sqrt{v} - \sqrt{v_1}\right) \qquad \Big| \cdot \frac{k}{2}$$

$$\frac{kt}{2} = \sqrt{v} - \sqrt{v_1} \qquad \Big| + \sqrt{v_1}$$

$$\sqrt{v} = \frac{kt}{2} + \sqrt{v_1} \qquad \Big| (\ldots)^2$$

$$v_{(t)} = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{v_1}\right)^2$$

$V_{(t_2=3s)} \approx 9{,}5\ \frac{m}{s}$

---

$\rightarrow$ Wie kommen wir von $v_{(t)}$ auf $x_{(t)}$ und $a_{(t)}$?

$$v_{(t)} = \frac{dx}{dt} \qquad |\cdot dt$$

$$v_{(t)}\, dt = 1\, dx \qquad \Big| \int (\ldots)$$

$$\int v_{(t)}\, dt = \int 1\, dx = x_{(t)}$$

$$\rightarrow x_{(t)} = \int v_{(t)}\, dt \quad \rightarrow v_{(t)} \xrightarrow{\text{Integration}} x_{(t)}$$

$$a_{(t)} = \frac{dv_{(t)}}{dt} \quad \rightarrow \quad v_{(t)} \xrightarrow{\text{Ableitung}} a_{(t)}$$

---

$$x_{(t)} = \int v_{(t)}\, dt = \int \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{v_1}\right)^2 dt$$

$$x_{(t)} = \frac{1}{3}\left(\frac{kt}{2} + \sqrt{v_1}\right)^3 \cdot \frac{2}{k} + c_1$$

RB: $x_{(t=t_0)} = x_0$

$$x_0 = \frac{1}{3}\left(\frac{kt_0}{2} + \sqrt{v_1}\right)^3 \cdot \frac{2}{k} + c_1$$

$$c_1 = x_0 - \frac{2}{3k}\left(\cancel{\frac{kt_0}{2}} + \sqrt{v_1}\right)^3$$

$$c_1 = 0{,}5m - 2{,}64m = -2{,}14m$$

$$\rightarrow x_{(t)} = \frac{2}{3k}\left(\frac{kt}{2} + \sqrt{v_1}\right)^3 - 2{,}14m$$

$$x_{(t_2)} \approx 17{,}36\ m$$

$$a_{(t)} = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\left[\frac{kt}{2} + \sqrt{v_1}\right]^2\right)$$

$$a_{(t)} = \cancel{2}\left(\frac{kt}{2} + \sqrt{v_1}\right)\frac{k}{\cancel{2}}$$

$$a_{(t)} = k\cdot\left(\frac{kt}{2} + \sqrt{v_1}\right)$$

$$a_{(t_2)} \approx 3{,}08\ \frac{m}{s^2}$$

Alternativ: Tabelle:

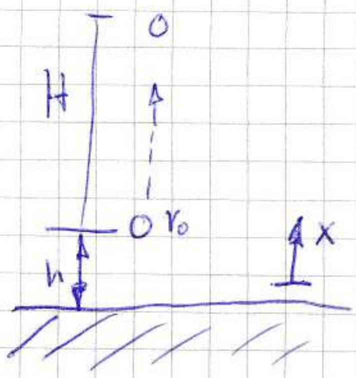
$a_{(v)} \rightarrow v_{(t)}$

$$t = t_0 + \int_{v_0}^{v} \frac{d\bar{v}}{a(\bar{v})}$$

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{1}{k\cdot\sqrt{\bar{v}}}\,d\bar{v}$$

$$\Rightarrow v_{(t)} = \left(\frac{kt}{2} + \sqrt{v_0}\right)^2 \quad \text{qed.}$$

# Aufgabe 1.8 - Kinematische Grundgrößen




$a = -g$

a) $v_0$ als $f(H)$

b) $t$

aus Tabelle folgt:

$$V_{(x)}^2 = V_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a_{(x)}\, dx$$

$$t_{(x)} = t_0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{V_{(x)}}$$

a) $V_{(x=H)}^2 \overset{!}{=} 0 = V_0^2 + 2\int_{h}^{H} -g\, dx$ (Umkehrpunkt)

$$0 = v_0^2 - 2g(H-h)$$

$$\rightarrow v_0 = \sqrt{2g(H-h)}$$

b) $t_{(x)} = 0 + \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{V_{(x)}}$

$$v_{(x)} = \sqrt{V_0^2 + 2\int_{x_0}^{x} a_{(x)}\, dx}$$

$$V_{(x)} = \sqrt{2g(H-h) + 2(-g(x-h))}$$

$$v_{(x)} = \sqrt{2g(H - \cancel{h} - x + \cancel{h})} = \sqrt{2g(H-x)}$$

$$t_{(x)} = \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{2g(H-x)}} = \int_{h}^{H} \frac{dx}{\sqrt{2g(H-x)}}$$

$$t_{(x)} = \frac{1}{g}\sqrt{2g(H-h)} = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$

# Aufgabe 1.3 - Schräger Wurf

$m = 200\,g \;,\; h_0 = 1{,}5\,m \;,\; v_0 = 40\,\frac{km}{h} \;,\; \alpha = 45°$

$$y(x) = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2}\,x^2 + \tan(\alpha)\,x + y_0$$

a) Wie weit fliegt der Ball?

$\rightarrow y(x) \overset{!}{=} 0$

$$0 = -\frac{1}{2}\,\frac{g}{\cos(45)^2 v_0^2}\,x^2 + \tan(45)x + h_0$$

$$0 = -\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}}\,\frac{g\,x^2}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{2}} v_0^2} + x + h_0$$

$$0 = -\frac{g}{v_0^2}\,x^2 + x + h_0 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{v_0^2}{g}\right)$$

$$0 = x^2 - \frac{v_0^2}{g}x - \frac{h_0 v_0^2}{g}$$

$$x_{1/2} = \frac{\cancel{4}\,v_0^2}{\cancel{4}\,2g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0^2}{g}\right)^2\frac{1}{4} + \frac{h_0 v_0^2}{g}} \qquad \Big| \; 40\,\frac{km}{h} = 11{,}11\,\frac{m}{s}$$

$x_1 = 13{,}94\,m \qquad x_2 = -1{,}35\,m$ ↯

$\rightarrow x_1 < 45\,m \rightarrow$ kein Abzeichen

b) Wie hoch fliegt der Ball?

$\rightarrow$ Extremstelle $y'(x) \overset{!}{=} 0$

$$y'(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left[y(x)\right] = -\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2}\,x + \tan(\alpha)$$

$$y'(x) \overset{!}{=} 0 = -\frac{2g}{v_0^2}x + 1$$

$$\Rightarrow x = \frac{v_0^2}{2g} = 6{,}29\,m$$

$$y(x = 6{,}29\,m) = 4{,}65\,m < 25\,m$$

c) Wie lange fliegt der Ball?

$t$ bis $y = 1{,}95\,m$ ?

$$y(t) = -\frac{g}{2} t^2 + \sin(\alpha)\, v_0\, t + y_0$$

$$0 = t^2 \cancel{+} - \frac{2 \sin(\alpha)\, v_0}{g}\, t - (y_0 - y(t))\, \frac{2}{g}$$

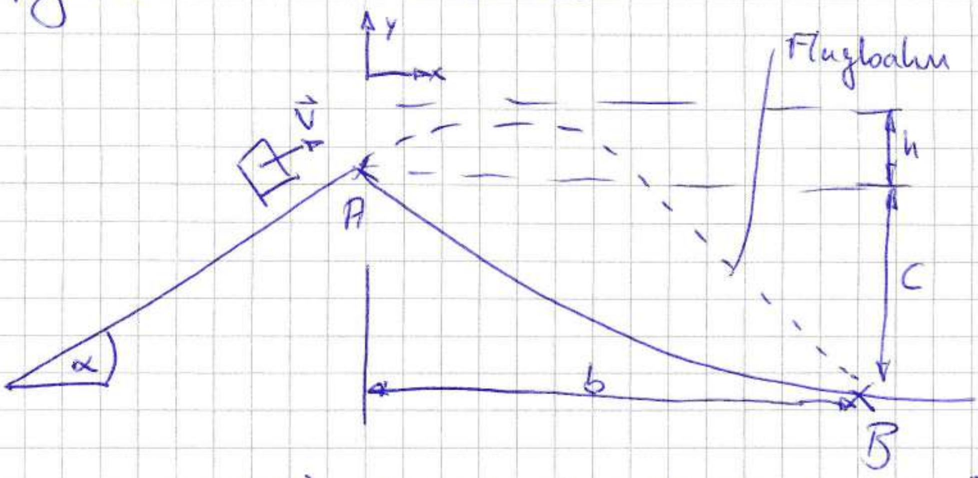
$$t_{1/2} = \frac{\sin(\alpha)\, v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{\sin(\alpha)\, v_0}{g}\right)^2 + (y_0 - y(t))\, \frac{2}{g}}$$

$$t_1 = \cancel{3{,}28\,s}\ 1{,}54\,s \quad , \quad t_2 = 0{,}06\,s$$

$$x(t) = \cos(\alpha)\, v_0\, t \quad \Big| \quad x(t_1) = 12{,}1\,m$$

$$v_{Jonas} = \frac{12{,}1\,m}{1{,}54\,s} = 7{,}86\,\frac{m}{s}$$

# Aufgabe 1.4 - Motorrad




a) Wie groß ist $\vec{v}$, damit das Motorrad bei B landet?

$$Y(x) = -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2} x^2 + \tan(\alpha)x + y_0$$

$$Y(b) \overset{!}{=} 0 = -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2} b^2 + \tan(\alpha) b + c \quad | \cdot v_0^2$$

$$0 = -\frac{g\, b^2}{2\cos(\alpha)^2} + (\tan(\alpha) b + c) v_0^2$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{g \cdot b^2}{2\cos(\alpha)} \cdot \frac{1}{\tan(\alpha) b + c}} \quad ✓$$

b) Wie groß ist h

$$y'(x) = \frac{d}{dx}(y(x)) = -\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2} x + \tan(\alpha)$$

$$y'(x) \overset{!}{=} 0 = -\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2} X + \tan(\alpha)$$

$$x_1 = \frac{\tan(\alpha) \cdot \cos(\alpha)^2}{g} v_0^2$$

$$h = Y(x_1) - c = -\frac{\cancel{g}}{2\cancel{\cos(\alpha)^2 v_0^2}} \frac{\tan(\alpha)^2 \cos(\alpha)^{\cancel{2}4}}{g^{\cancel{2}}} v_0^{\cancel{2}4} + \frac{\tan(\alpha)\cos(\alpha)^2}{g} v_0^2 + \cancel{c} - \cancel{c}$$

$$h = -\frac{\tan(\alpha)^2 \cos(\alpha)^2 v_0^2}{2g} = \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{2g} \quad ✓$$

c) Wie lange ist die Flugdauer von A bis B

$$x_{(t)} = \cos(\alpha)\, v_0\, t$$

$$\hookrightarrow t_{(x)} = \frac{x}{\cos(\alpha)\, v_0}$$

$$t_{(x=b)} = \frac{b}{\cos(\alpha)\, v_0}$$

# Aufgabe 1.6 - Basketball


a) Wie groß muss $v_0$ sein, damit der Ball direkt im Korb landet?

$$y_{(x)} = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos(\alpha)^2} x^2 + \tan(\alpha)\, x + y_0$$

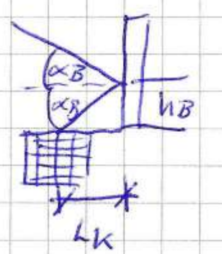
$$y_{(x=L)} = h_K - h_S = -\frac{g}{2 v_0^2 \cos(\alpha)^2} L^2 + \tan(\alpha)\, L$$

$$-g L^2 = \left[h_K - h_S - \tan(\alpha) L\right] 2\, v_0^2 \cos(\alpha)^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{-g L^2}{2\cos(\alpha)^2 \left[h_K - h_S - \tan(\alpha) L\right]}} \quad ✓$$

b) Wie groß muss $v_0$ sein, damit der Ball am Brett abprallt und im Korb landet?

$$y_{(L+L_K)} = -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2} (L + L_K)^2 + \tan(\alpha)(L + L_K) \stackrel{!}{=} h_K - h_S + h_B$$




$$\tan(\alpha_B) = \frac{h_B}{L_K} \rightarrow h_B = \tan(\alpha_B) \cdot L_K$$

$$y'(x) = -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2} x + \tan(\alpha)$$

$$y'(L+L_K) \overset{!}{=} \tan(\alpha_B) = \frac{h_B}{L_K} = -\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2}(L+L_K) + \tan(\alpha)$$

$$\Rightarrow h_B = -L_K(L+L_K)\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2} + L_K \tan(\alpha)$$

$$h_K - h_S + h_B = -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2}(L+L_K)^2 + \tan(\alpha)(L+L_K)$$

$$h_K - h_S - L_K(L+L_K)\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2} \cancel{+ L_K \tan(\alpha)}$$

$$= -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2}(L+L_K)^2 + \cancel{\tan(\alpha)}(L+\cancel{L_K})$$

$$h_K - h_S - L_K(L+L_K)\frac{g}{\cos(\alpha)^2 v_0^2}$$

$$= -\frac{g(L+L_K)^2}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2} + \tan(\alpha) L \quad \Big| \cdot v_0^2$$

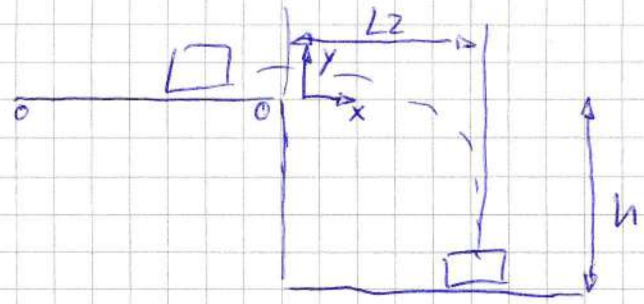
$$v_0^2\left[h_K - h_S\right] - \frac{g L_K (L+L_K)^2}{\cos(\alpha)^2} = -\frac{g(L+L_K)^2}{2\cos(\alpha)^2} + \tan(\alpha) L v_0^2$$

$$v_0^2\left[h_K - h_S - \tan(\alpha) L\right] = -\frac{g(L+L_K)^2}{2\cos(\alpha)^2} + g\frac{L_K(L+L_K)^2}{\cos(\alpha)^2}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{-\frac{g(L+L_K)^2}{2\cos(\alpha)^2} + \frac{g L_K (L+L_K)}{\cos(\alpha)^2}}{\left[h_K - h_S - \tan(\alpha) L\right]}} \quad \checkmark$$

## Aufgabe 1.6 – Förderband

a) Wie weit fliegt die Kartoffel




$$y_{(x)} = -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2}x^2 + \tan(\alpha)x + y_0$$

$$y(x=L2) \overset{!}{=} -h = -\frac{g}{2\cos(\alpha)^2 v_0^2}L_2^2 + \tan(\alpha)L_2 + 0$$

$$\alpha = 0^\circ \rightarrow \cos(\alpha) = 1;\ \tan(\alpha) = 0$$

$$\cancel{-}h = \cancel{-}\frac{g}{2v_0^2}L_2^2$$

$$L_2 = \pm\sqrt{\frac{2v_0^2h}{g}} \quad ✓$$

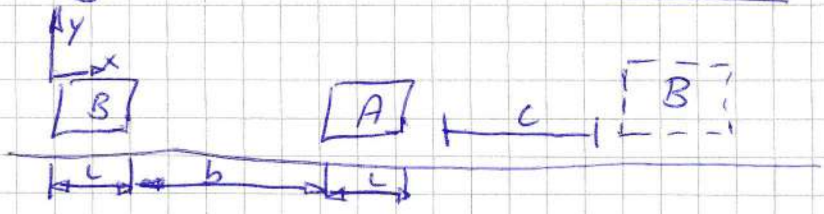
b) Wie lange ist die Wurfdauer?

$$x_{(t)} = v_0 t \cos(\alpha) \quad |\alpha = 0^\circ$$

$$x_{(t)} \overset{!}{=} L_2 = v_0 t$$

$$\rightarrow t = \frac{L_2}{v_0} \quad ✓$$

# Aufgabe 1.7 – LKW Rennen



a) Wie lange dauert der Überholvorgang, wenn LKW B mit einem Abstand c vor LKW A wieder einschert?

$$x_{(t)} = x_0 + v_0 t$$

$$x_A = (L + b + L) + v_A t = 2L + b + v_A t \quad \text{(Vorderkante)}$$

$$x_B = 0 + v_B t \quad \text{(Hinterkante)}$$

$$x_B - x_A \stackrel{!}{=} + c$$

$$c = v_B t - 2L - b - v_A t$$

$$c = -(2L + b) + (v_B - v_A) t$$

$$t = \frac{2L + b + c}{v_B - v_A} \checkmark \qquad | \; v_B > v_A$$

b) Welche Strecke legt LKW B dabei zurück?

$$x_B = v_B t = v_B \frac{2L + b + c}{v_B - v_A} \checkmark$$