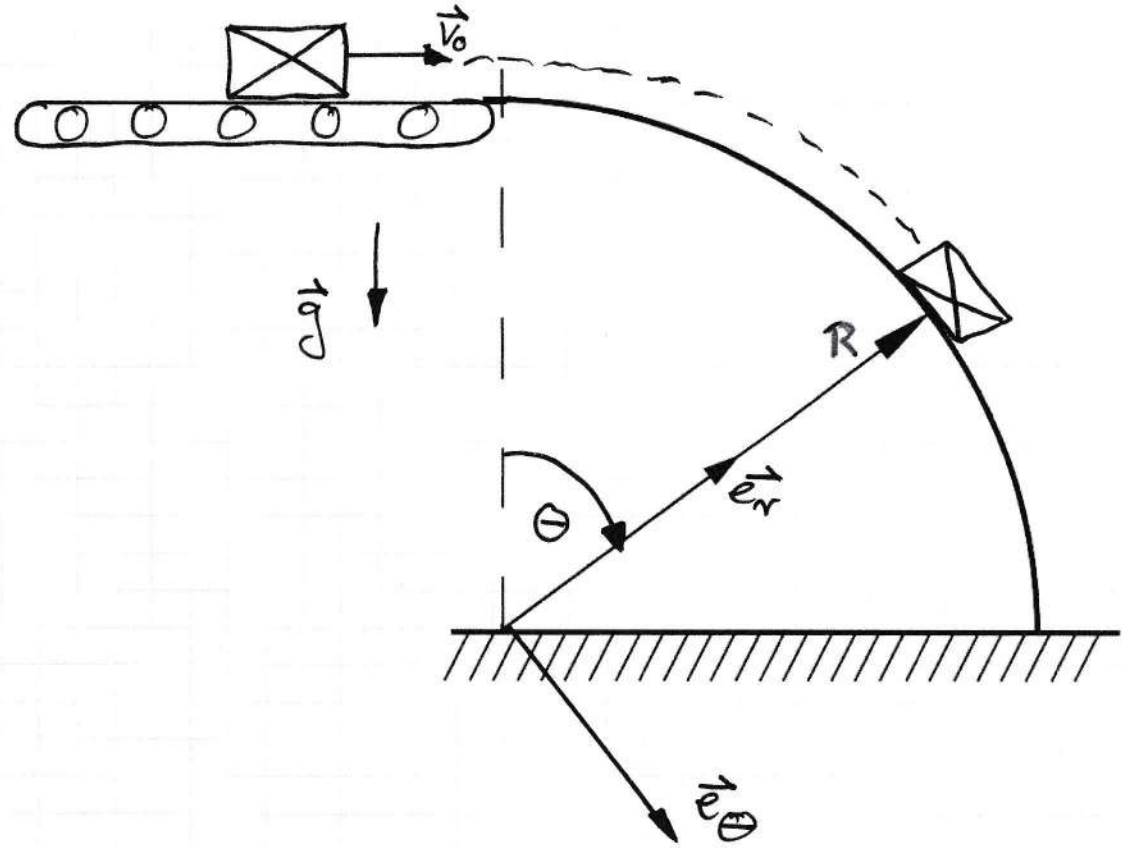
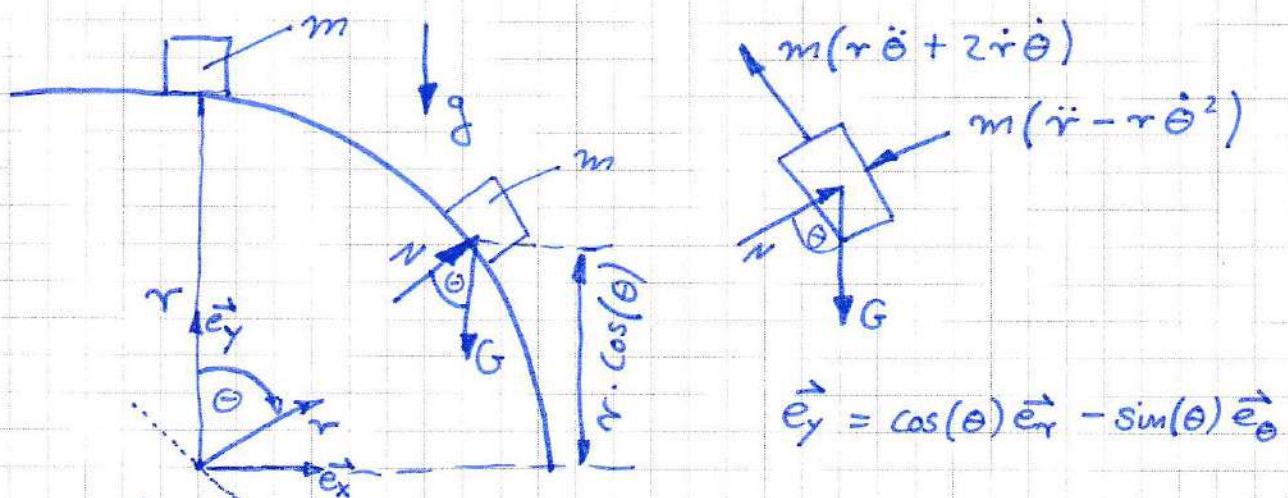


Box on conveyor with circular slide

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

Aufgabe 4.1 – Paketrutsche Arbeitssatz

In einem Verteilerzentrum der Post werden Pakete über eine halbkreisförmige Rampe mit Radius $r = 1\,m$ in eine Sammelbox befördert. Bestimme für Paket der Masse $m = 2{,}5\ kg$ den Winkel Θ_{max}, bei dem das Paket den Kontakt zur Oberfläche verliert. Die Anfangsgeschwindigkeit sei $v_0 = 0{,}5\ \frac{m}{s}$, die Reibung ist vernachlässigbar.



$$\vec{e}_y = \cos(\theta)\,\vec{e}_r - \sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$$

Arbeitssatz: $T_1 + W_{12} = T_2$

$$T_1 = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad ; \quad T_2 = \frac{1}{2} m v_2^2$$

$$W_{12} = \int \vec{F}\, ds \quad ; \quad \vec{s} = \cancel{2\pi} r \cdot \frac{\Theta}{\cancel{2\pi}} \vec{e}_\Theta = r \cdot \Theta \cdot \vec{e}_\Theta$$

$$d\vec{s} = r\, d\Theta\, \vec{e}_\Theta$$

$$W_{12} = \int \vec{F}\ r\, d\theta\, \vec{e}_\Theta$$

$$\vec{F} = -mg\,\vec{e}_y = -mg\cos(\theta)\,\vec{e}_r + mg\sin(\theta)\,\vec{e}_\theta$$

$$W_{12} = \int \vec{F}\, d\vec{s}$$

Skalarprodukt

$$W_{12} = \int \underbrace{\left(-mg\cos(\theta)\,\vec{e}_r + mg\sin(\theta)\,\vec{e}_\theta\right)\cdot r\,d\theta\,\vec{e}_\theta}_{=0}$$

$= 1$

$$W_{12} = \int_{\theta=0}^{\theta_{max}} + mgr\sin(\theta)\,d\theta$$

$$W_{12} = mgr\left[-\cos(\theta)\right]_0^{\theta_{max}} = mgr\left(1-\cos(\theta_{max})\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gr\left(1-\cos(\theta_{max})\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}v_2^2$$

$$v_2^2 = v_0^2 + 2gr\left(1-\cos(\theta_{max})\right)$$

Gleichung für Normalkraft:

$$\Sigma F_r = 0 = N - mg\cos(\theta_{max}) - m(\underbrace{\cancel{\ddot{r}}}_{=0;\ r=\text{Konst.}} - r\dot{\theta}^2)$$

Abheben: $N \stackrel{!}{=} 0$

$$\rightarrow 0 = -mg\cos(\theta_{max}) + mr\dot{\theta}^2 \quad \Big|\ \dot{\theta} \hat{=} \omega = \frac{v}{r}$$

$$\cancel{m}g\cos(\theta_{max}) = \cancel{m}\cancel{r}\frac{v_2^2}{r^{\cancel{2}}}$$

$$\rightarrow v_2^2 = gr\cos(\theta_{max})$$

$$v_0^2 + 2gr\left(1-\cos(\theta_{max})\right) = gr\cos(\theta_{max})$$

$$v_0^2 + 2gr - 2gr\cos(\theta_{max}) = gr\cos(\theta_{max}) \quad \Big| + 2gr\cos(\theta_{max})$$

$$v_0^2 + 2gr = 3gr\cos(\theta_{max})$$

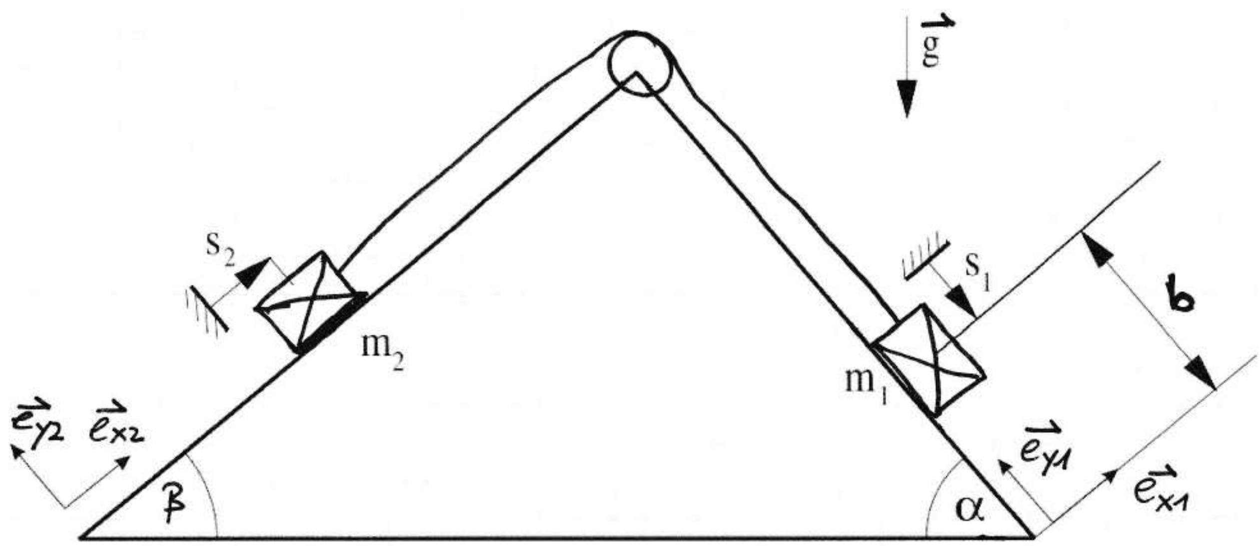
$$\rightarrow \theta_{max} = \cos^{-1}\left(\frac{v_0^2 + 2gr}{3gr}\right) \simeq \underline{47{,}53^\circ}$$

Alternative für W_{12}

$$W_{12} = \int \vec{F}\, d\vec{s} \stackrel{!}{=} -G \cdot \Delta y$$ (Arbeit eines Gewichtes)

$$W_{12} = -mg\left(r\cos(\theta_{max}) - r\right)$$ (Ende – Anfang)

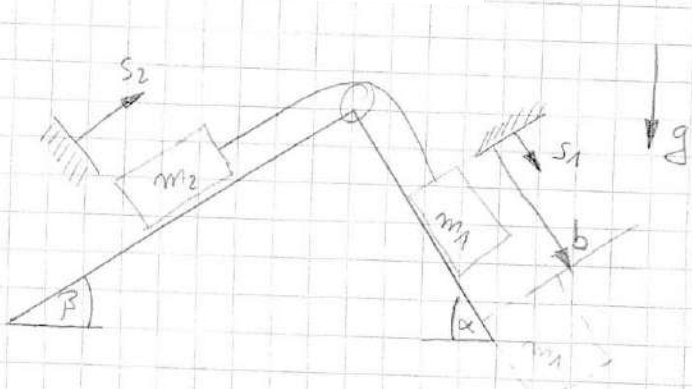
$$W_{12} = mgr\left(1 - \cos(\theta_{max})\right)$$ q.e.d.

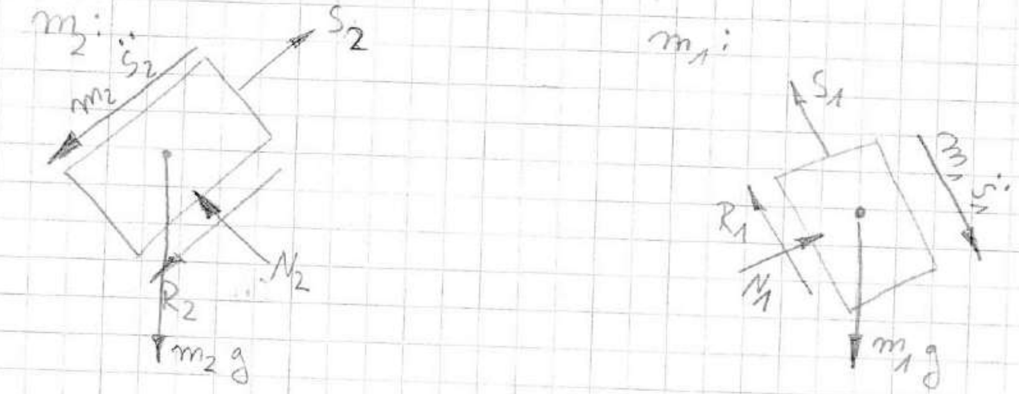


two boxes on a hill connected with a rope

	Projekt: Aufgabe_4_2	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

1)





undehnbares Seil: $S_1 \overset{!}{=} S_2 \overset{!}{=} S \quad (ds_1 = ds_2 = ds)$
Reibung entgegen Bewegungsrichtung

2) - N_1, N_2 weil $\perp$ zur Bahn
- Seilkräfte S_1, S_2 $\rightarrow$ heben sich auf
- Trägheiten $m_1 \ddot{s}_1$, $m_2 \ddot{s}_2$ werden nicht berücksichtigt

3) Kräfte mit Arbeit:
- Hangabtriebskraft $m\, g \sin(\dots)$
- Reibungskraft $R = \mu \cdot N = \mu\, m\, g \cos(\dots)$

Arbeit am Gesamtsystem:

$$W = \int_0^b \overbrace{(\underbrace{m_1 g \sin(\alpha)}_{\text{Hangabtriebskraft}} - R_1)}^{m_1} ds_1 + \int_0^b \overbrace{(\underbrace{-m_2 g \sin(\beta)}_{\text{entgegen der Bewegung von } m_1} - R_2)}^{m_2} ds_2$$

Reibung wirkt <u>immer</u> entgegen der Bewegungsrichtung! Für $\dot{s}_1 > 0$; $\dot{s}_2 > 0$ gilt:

$$R_1 = \mu \, m_1 \, g \, \cos(\alpha)$$
$$R_2 = \mu \, m_2 \, g \, \cos(\beta)$$

$$W = \int_0^b \left(m_1 g \sin(\alpha) - \mu \, m_1 g \cos(\alpha) \right) ds$$
$$+ \int_0^b \left(- m_2 g \sin(\beta) - \mu \, m_2 g \cos(\beta) \right) ds$$

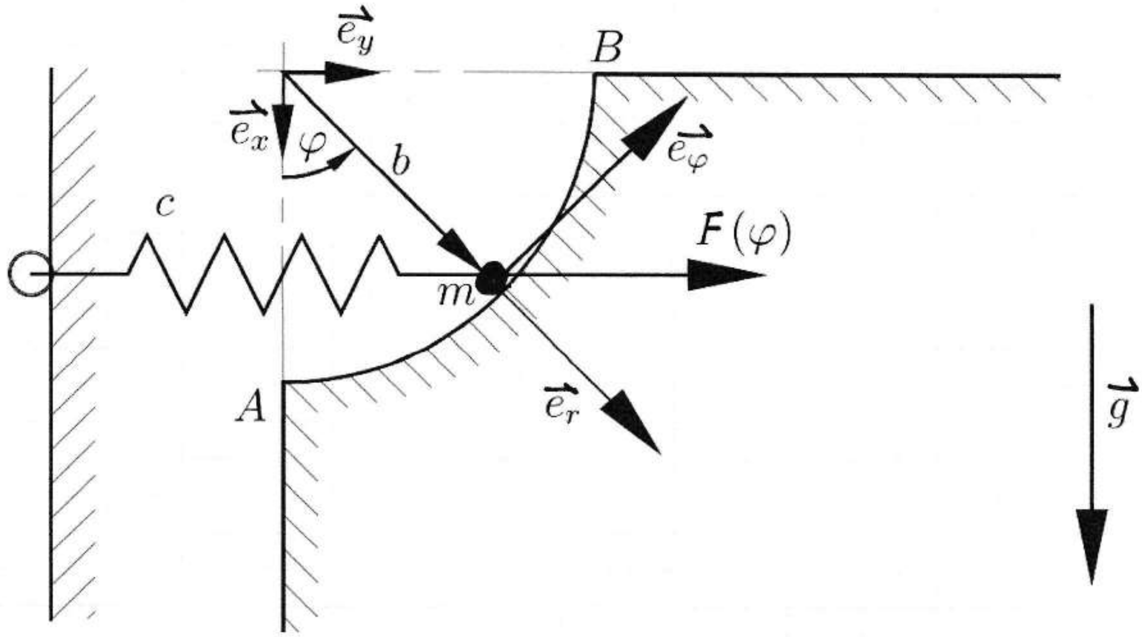
$$W = \int_0^b \left(m_1 g \sin(\alpha) - \mu \, m_1 g \cos(\alpha) - \frac{1}{3} m_1 g \sin(\beta) - \frac{1}{3} \mu \, m_1 g \cos(\beta) \right) ds$$

$$W = m_1 g \left[\sin(\alpha) - \mu \cos(\alpha) - \frac{1}{3} \left(\sin(\beta) + \mu \cos(\beta) \right) \right] b$$

4) Arbeitssatz:

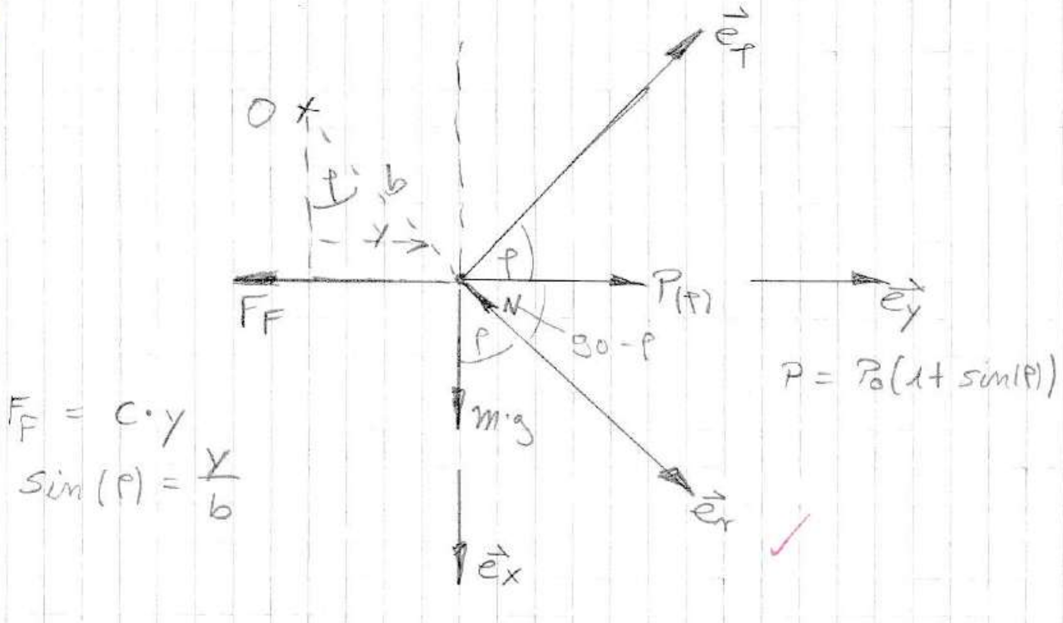
$$W_{12} = T_2 - T_1$$
$T_1 = 0$ weil in Ruhe
$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{s}_2^2$$
$$T_2 = \frac{1}{2} m_1 \dot{s}^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} m_1 \dot{s}^2$$
$$T_2 = \frac{4}{6} m \dot{s}^2 = \frac{2}{3} m \dot{s}^2$$

$$\rightarrow \frac{2}{3} \cancel{m} \dot{s}^2 = \cancel{m} g b [\ldots]$$
$$\dot{s} = \sqrt{\frac{3}{2} g b [\ldots]} = v \rightarrow$$ Geschwindigkeit von m_1 bei b



ball with spring in circular track

1)



2) $\vec{e}_x = \cos(\varphi)\vec{e}_r - \sin(\varphi)\vec{e}_\varphi$

$\vec{e}_y = \sin(\varphi)\vec{e}_r + \cos(\varphi)\vec{e}_\varphi$

$\vec{F}_F = -c \cdot y\,\vec{e}_y = -c \cdot \sin(\varphi) \cdot b\,\vec{e}_y = -c\sin(\varphi) b\left(\sin(\varphi)\vec{e}_r + \cos(\varphi)\vec{e}_\varphi\right)$

$\vec{G} = m \cdot g\,\vec{e}_x = mg\left(\cos(\varphi)\vec{e}_r - \sin(\varphi)\vec{e}_\varphi\right)$

$\vec{P}_{(\varphi)} = P_0\left(1+\sin(\varphi)\right)\left(\sin(\varphi)\vec{e}_r + \cos(\varphi)\vec{e}_\varphi\right)$

$N = N \cdot \vec{e}_r$

$\vec{r} = b \cdot \vec{e}_r$

$\frac{d\vec{r}}{\cancel{dt}} = 0 + b\,\dot{\vec{e}}_r = b\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = b \cdot \frac{d\varphi}{\cancel{dt}}\,\vec{e}_\varphi$

$\rightarrow d\vec{r} = b \cdot d\varphi\,\vec{e}_\varphi$

3) $W = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} \vec{F} \cdot (b \, d\varphi \, \vec{e}_\varphi)$

$$W_G = \int_0^{\varphi_1} \left[m \cdot g \left(-\sin(\varphi)\, \overbrace{\vec{e}_\varphi + \underbrace{\cos(\varphi)\, \vec{e}_r) \right] \cdot (b \, d\varphi \, \vec{e}_\varphi}_{=0 \quad (\vec{e}_\varphi \perp \vec{e}_r)}}^{=1})$$

$$W_G = \int_0^{\varphi_1} -mgb \sin(\bar{\varphi}) \, d\bar{\varphi}$$

$$W_G = mgb \cos(\bar{\varphi}) \Big|_0^{\varphi_1} = mgb \, (\cos(\varphi_1) - 1)$$

$$W_F = \int_0^{\varphi_1} -cb\sin(\varphi) \left(\sin(\varphi) \overbrace{\vec{e}_r + \cos(\varphi) \underbrace{\vec{e}_\varphi \right) \cdot (b \, d\varphi \, \vec{e}_\varphi}_{=1}}^{=0})$$

$$W_F = \int_0^{\varphi_1} -cb^2 \sin(\bar{\varphi}) \cos(\bar{\varphi}) \, d\bar{\varphi}$$

$$W_F = -cb^2 \, \frac{1}{2} \sin(\bar{\varphi})^2 \Big|_0^{\varphi_1} = -\frac{1}{2} cb^2 \sin(\varphi_1)^2$$

$$W_P = \int_0^{\varphi_1} P_0 (1 + \sin(\varphi)) \left(\sin(\varphi) \overbrace{\vec{e}_r + \cos(\varphi) \underbrace{\vec{e}_\varphi \right) \cdot (b \, d\varphi \, \vec{e}_\varphi}_{=1}}^{=0})$$

$$W_P = \int_0^{\varphi_1} P_0 \, (1 + \sin(\bar{\varphi})) \, b \cos(\bar{\varphi}) \, d\bar{\varphi}$$

$$W_P = \int_0^{\varphi_1} P_0 b \cos(\bar{\varphi}) \, d\bar{\varphi} + \int_0^{\varphi_1} P_0 \, b \sin(\bar{\varphi}) \cos(\bar{\varphi}) \, d\varphi$$

$$W_P = P_0 b \sin(\bar{\varphi}) \Big|_0^{\varphi_1} + P_0 b \, \frac{1}{2} \sin(\bar{\varphi})^2 \Big|_0^{\varphi_1}$$

$$W_P = P_0 b \sin(\varphi_1) + P_0 b \, \frac{1}{2} \sin(\varphi_1)^2$$

$$W_P = P_0 b \left(\sin(\varphi_1) + \frac{1}{2} \sin(\varphi_1)^2 \right)$$

$$W_N = \int_0^{\varphi_1} N \cdot \underbrace{\vec{e}_r \cdot (b\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi)}_{=0 \quad \text{weil } \vec{e}_r \perp \vec{e}_\varphi} = 0$$

→ Zwangskraft N verrichtet keine Arbeit, weil $\perp$ zur Bewegung

4) $W = T_1 - T_0$

$T_1 = \frac{1}{2} m v_1^2 = 0$ weil "gerade so erreicht"

$T_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 = 0$ weil Aufgabe: ohne Anfangsgeschwindigkeit

$\rightarrow W \overset{!}{=} 0$

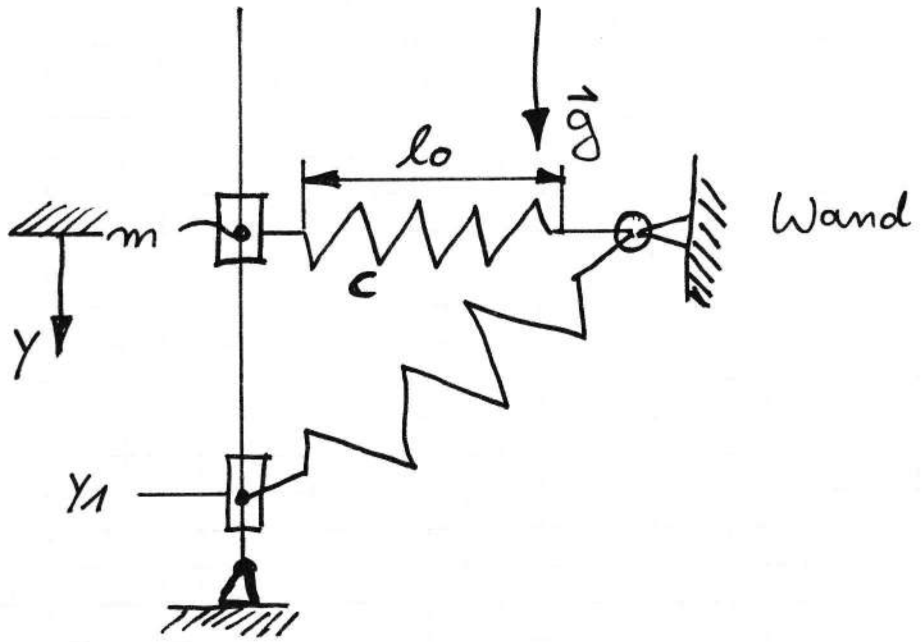
$\varphi_A = 0, \; v_A = 0, \; \varphi_B = \frac{\pi}{2} = \varphi_1, \; v_B = 0$

$$0 = mg\cancel{b}(\cos(\varphi_1) - 1) + \left(-\frac{1}{2} c b^{\cancel{2}} \sin(\varphi_1)^2\right) + P_0 \cancel{b}\left(\sin(\varphi_1) + \frac{1}{2}\sin(\varphi_1)^2\right)$$

$$0 = mg\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - 1\right) - \frac{1}{2} cb \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + P_0\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right)$$

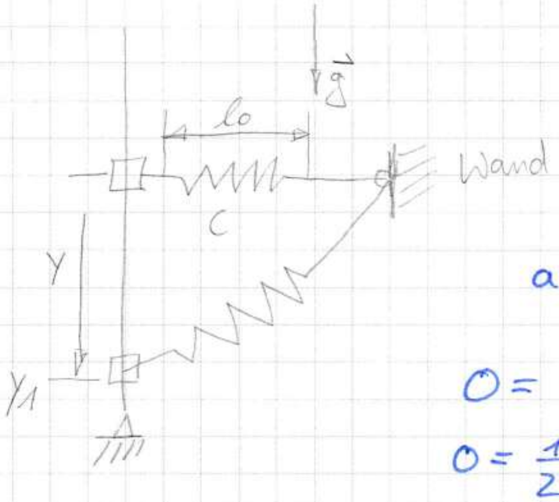
$$0 = -m \cdot g - \frac{1}{2} cb + \frac{3}{2} P_0$$

$$\rightarrow P_0 = \frac{2}{3}\left(mg + \frac{1}{2} cb\right) = \frac{1}{3}(2mg + cb)$$



gliding tube with spring attached to wall

Aufgabe 4.4 – Gleithülse



Lösung mit Energieerhaltungssatz:

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

a) start aus Ruhelage : $T_1 = 0$; $V_1 = 0$

$$0 = T_2 + V_2$$

$$0 = \frac{1}{2} m v_2^2 + (V_F - V_G)$$

$$V_F = \frac{1}{2} c\, \Delta\ell^2 \quad ; \quad V_G = -mg\, \Delta y$$

$$\Delta\ell = \sqrt{\ell_0^2 + y_1^2} - \ell_0 \quad ; \quad \Delta y = y_1 - \overset{=0}{y_0} = y_1$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \left(\frac{1}{2} c \left(\sqrt{\ell_0^2 + y_1^2} - \ell_0\right)^2 - mg y_1\right)$$

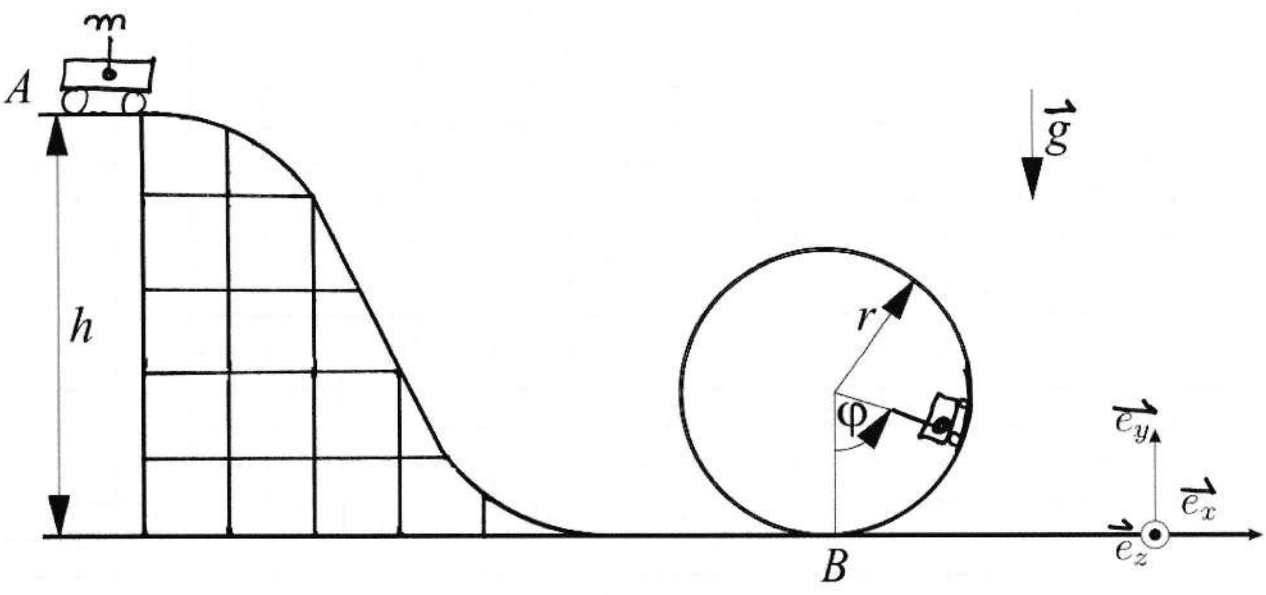
$$v_2 = \sqrt{2 g y_1 - \frac{c}{m}\left(\sqrt{\ell_0^2 + y_1^2} - \ell_0\right)^2} \quad \underline{\underline{= 4{,}39\ \frac{m}{s}}} \ ✓$$

b) Start mit $v_1 = 2\ \frac{m}{s}$ nach oben

$$T_1 + \underset{=0}{\cancel{V_1}} = T_2 + V_2$$

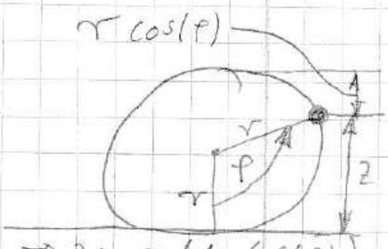
$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \left(\frac{1}{2} c \left(\sqrt{\ell_0^2 + y_1^2} - \ell_0\right)^2 - mg y_1\right)$$

$$\Rightarrow v_2 = \sqrt{2 g y_1 - \frac{c}{m}\left(\sqrt{\ell_0^2 + y_1^2} - \ell_0^2\right) + v_1^2} \quad \underline{\underline{= 4{,}82\ \frac{m}{s}}} \ ✓$$



roller coaster with Loop

	Projekt: Aufgabe_4_5	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	



1) Energiesatz: $T_0 + V_0 = T_1 + V_1$

$\rightarrow z = r(1-\cos(\varphi))$

Punkt A: $T_0 = 0$; $V_0 = mgh$

Punkt im Looping: $T_1 = \frac{1}{2} m v^2$; $V_1 = mgz = mgr(1-\cos(\varphi))$

$$\rightarrow 0 + \cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}v^2 + \cancel{m}gr(1-\cos(\varphi))$$

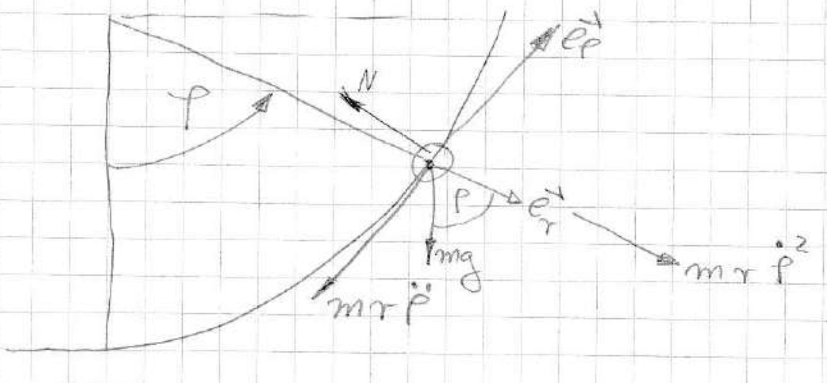
$$v^2 = 2g\left[h - r(1-\cos(\varphi))\right]$$

$$v_{(\varphi)} = \pm\sqrt{2g\left[h - r(1-\cos(\varphi))\right]}$$

oder mit $v = r \cdot \dot{\varphi}$

$$\dot{\varphi}_{(\varphi)} = \pm\sqrt{\frac{2g}{r}\left[\frac{h}{r} - 1 + \cos(\varphi)\right]}$$

2) d'Alembert $\qquad \sum \vec{F} + \sum \vec{Z} + \sum \vec{T} = \vec{0}$



$$\sum F_r = 0$$

$$0 = mg\cos(\varphi) - N + mr\dot{\varphi}^2$$

$$N = m\left[g\cos(\varphi) + r\dot{\varphi}^2\right]$$

$$N_{(\varphi)} = mg\left[2\frac{h}{r} + 3\cos(\varphi) - 2\right]$$

3) $N_{(\varphi)} \geq 0 \quad \forall \varphi \in [0; 2\pi)$

$\rightarrow$ kritische Stelle? (Stellen?)

$\hookrightarrow$ Minima der Normalkraft für $0 \leq \varphi \leq 2\pi$

$$\frac{d}{d\varphi} N_{(\varphi)} = -3\,mg \sin(\varphi) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\varphi_1 = 0 \;;\; \varphi_2 = \pi$$

$$\frac{d^2}{d\varphi^2} N_{(\varphi)} = -3\,mg \cos(\varphi) \stackrel{!}{>} 0$$

$$\varphi_1 : \; -3mg < 0 \quad \lightning$$
$$\varphi_2 : \; 3\,mg > 0 \quad \checkmark$$

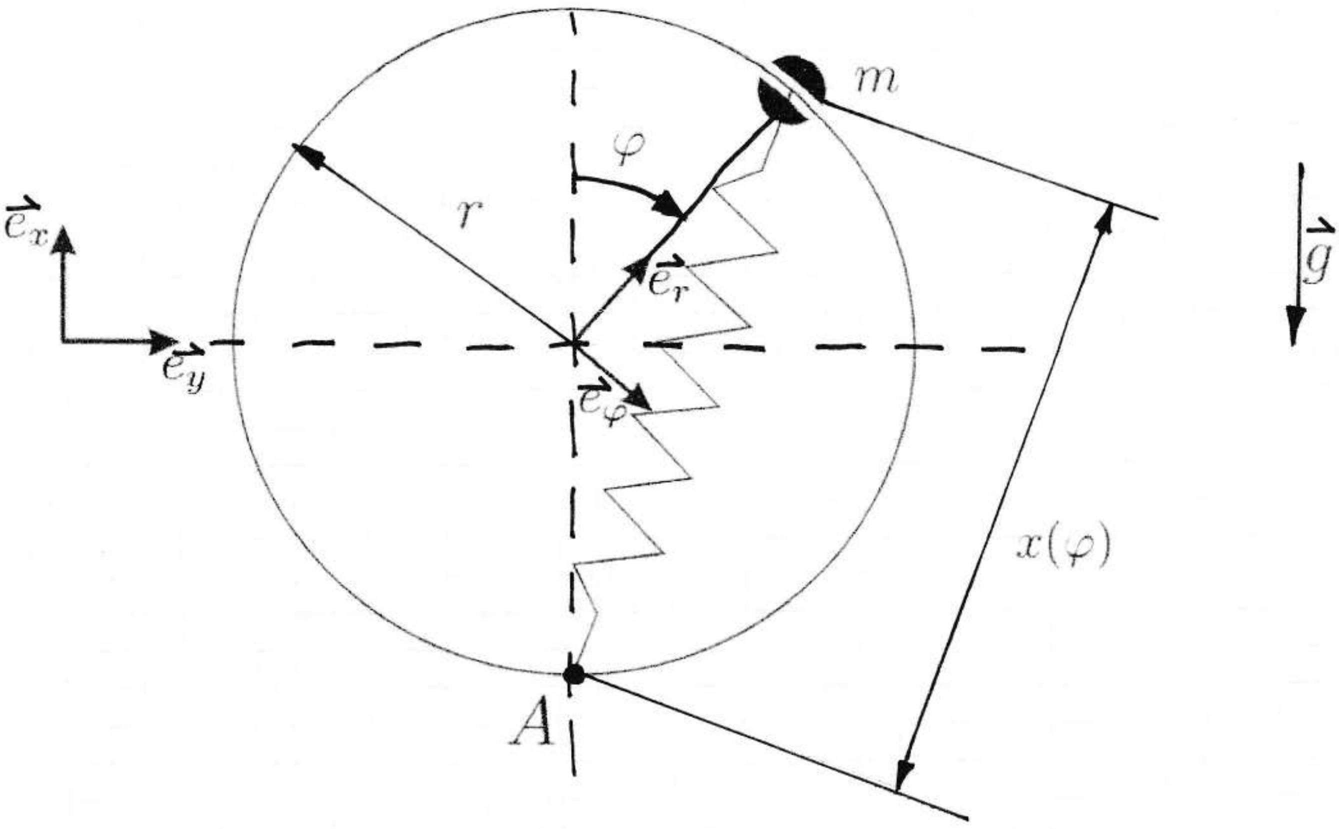
$\rightarrow$ Kritische Stelle : $\varphi = \pi$ (180° / oberer Totpunkt)

Kein Abheben an kritischer Stelle $\varphi = \pi$?

$$\rightarrow N_{(\pi)} = mg\left[2\frac{h}{r} - 3 - 2\right] \geq 0$$

$$\frac{h}{r} \geq \frac{5}{2}$$

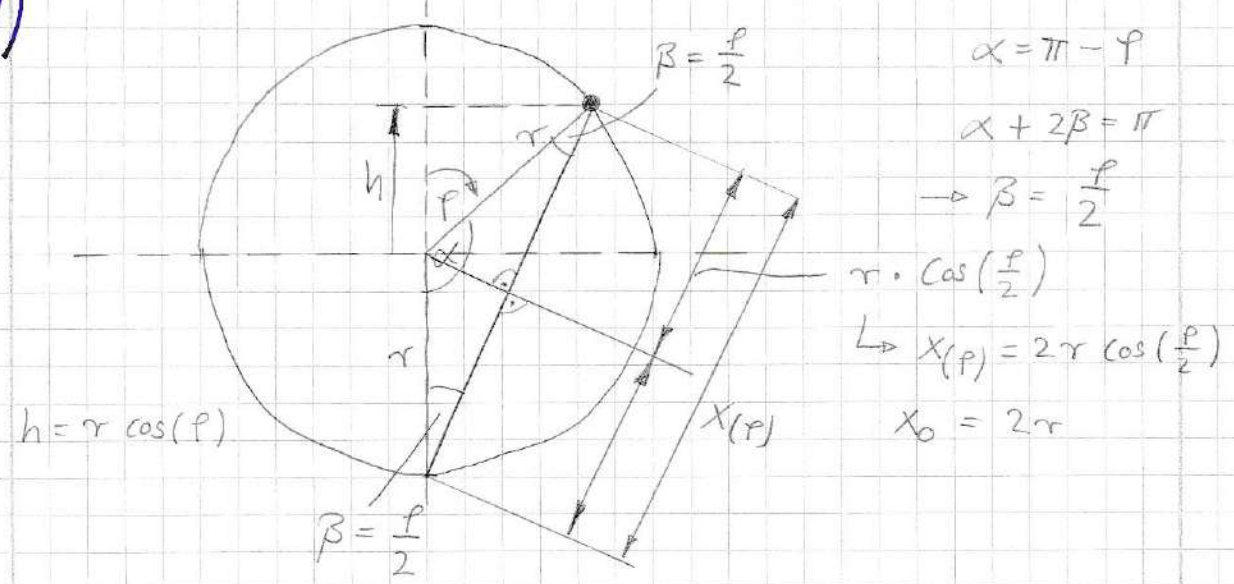
$$\Rightarrow h \geq \frac{5}{2} r$$



ball on circle with spring

	Projekt: Aufgabe_4_6	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

1)



$$V_{(\varphi)} = V_G + V_F = mgh + \frac{1}{2}c(x - x_0)^2$$

$$V_{(\varphi)} = mgr\cos(\varphi) + \frac{1}{2}c\left(2r\cos(\frac{\varphi}{2}) - 2r\right)^2$$

$$V_{(\varphi)} = mgr\cos(\varphi) + 2cr^2\left(\cos(\frac{\varphi}{2}) - 1\right)^2$$

2) Energiesatz:

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2 + \cancel{m}gr + 0 = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 + \cancel{m}gr\cos(\varphi) + \frac{2cr^2}{m}\left(\cos(\frac{\varphi}{2}) - 1\right)^2$$

$$v_1^2 = \left[v_0^2 + 2gr(1 - \cos(\varphi)) - \frac{4cr^2}{m}\left(\cos(\frac{\varphi}{2}) - 1\right)^2\right]$$

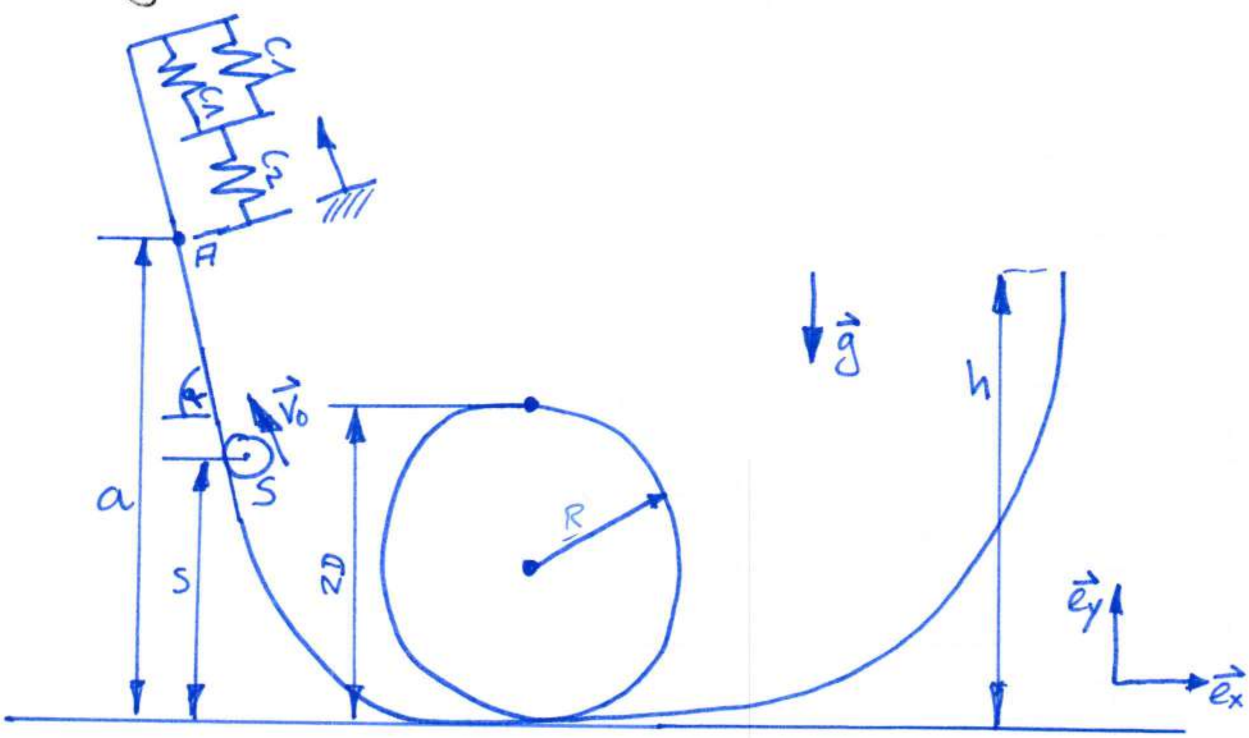
$$\rightarrow v_{(\varphi)} = \pm\sqrt{[\ldots]}$$ ✓

3) $v_{(\varphi = \frac{\pi}{2})} \stackrel{!}{=} 0$

$$\rightarrow v_0^2 = \frac{4cr^2}{m}\Big(\overbrace{\cos(\frac{\pi}{4})}^{\frac{\sqrt{2}}{2}} - 1\Big)^2 - 2gr\big(1 - \underbrace{\cos(\frac{\pi}{2})}_{=0}\big)$$

$$v_0 = \pm\sqrt{\frac{4cr^2}{m}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)^2 - 2gr}$$ ✓

Aufgabe 4.7 – Murmelbahn



Eine Murmel bewegt sich reibungsfrei im Gravitationsfeld entlang der gezeigten Bahn. Am linken Ende ist ein Federpaket mit drei Federn angebracht, am rechten Ende hört die Bahn ohne Anschlag einfach auf, am untersten Punkt befindet sich ein Looping mit Durchmesser D.
Die Murmel wird im Punkt S mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 in Richtung der Federn gestartet. Der Anschlagpunkt A ist in der Höhe A über dem Boden. Die Federn besitzen die Federkonstanten $c_1 = c$, $c_2 = 2c_1$. Die Ausdehnung der Murmel sei vernachlässigbar.

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

a) Geben Sie das Potential und die kinetische Energie der Murmel in den Punkten S und A an. Geben Sie damit die Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ im Punkt A an. Verwenden sie den tiefsten Punkt der Bahn als Nullniveau des Potentials

$$T_S = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad , \quad V_S = V_{pot} + \underbrace{\cancel{V_F}}_{=0} = mgs$$

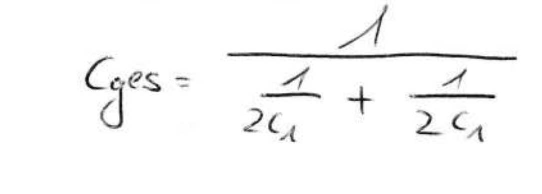
$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \quad ; \quad V_A = V_{pot} + V_F = mga$$

$$EES: \quad T_S + V_S \overset{!}{=} T_A + V_A$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m} v_0^2 + \cancel{m} g s = \frac{1}{2} \cancel{m} v_A^2 + \cancel{m} g a$$

$$v_A = \sqrt{v_0^2 + 2g(s-a)}$$

b) Wie groß ist die Ersatzfederkonstante c_{ges}? Ermitteln sie die Abhängigkeit der maximalen Stauchung der Federn x_{max} von der Geschwindigkeit $\vec{v}_A$ im Anschlagpunkt.



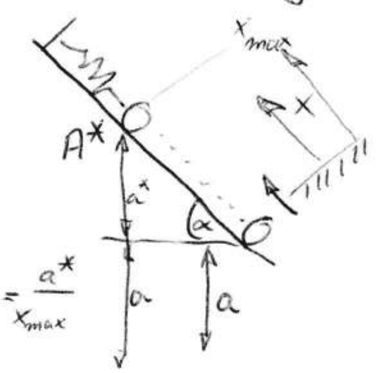
Parallelschaltung von Federn
→ Reihenschaltung von Widerständen

$$c_{11} = 2c_1$$

$$c_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{2c_1} + \frac{1}{2c_1}} = c_1 = \underline{\underline{c}}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

Feder maximal gespannt:



$\sin(\alpha) = \frac{a^*}{x_{max}}$

$$T_A + V_A \overset{!}{=} \underbrace{\cancel{T_{A^*}}}_{=0} + V_{A^*}$$

$$T_A = \frac{1}{2} m v_A^2 \;; \quad V_{A^*} = mg(a + a^*) + \frac{1}{2} c\, x_{max}^2$$

$$V_A = mga$$

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v_A^2 + mga = mg(a + a^*) + \frac{1}{2} c\, x_{max}^2$$

$$\frac{1}{2} m v_A^2 + \cancel{mga} = \cancel{mga} + mga^* + \frac{1}{2} c\, x_{max}^2 \quad \Big|\; a^* = \sin(\alpha)\, x_{max}$$

$$\frac{1}{2} c\, x_{max}^2 + mg\sin(\alpha)\, x_{max} - \frac{1}{2} m v_A^2 = 0$$

$$x_{max}^2 + \underbrace{2\,\frac{mg}{c}\sin(\alpha)}_{p}\, x_{max} \underbrace{- \frac{m}{c} v_A^2}_{q} = 0$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

$$x_{1/2} = -\frac{mg}{c}\sin(\alpha) \pm \sqrt{\left(\frac{mg}{c}\sin(\alpha)\right)^2 + \frac{m}{c} v_A^2}$$

c) Bestimmen sie die Geschwindigkeit der Murmel im höchsten Punkt des Loopings.

$$T_S + V_S = T_{HP} + V_{HP}$$

$$T_S = \frac{1}{2} m v_0^2 \;, \quad V_S = V_G + \underbrace{\cancel{V_F}}_{=0} = mgs$$

$$T_{HP} = \frac{1}{2} m v_{HP}^2 \;, \quad V_{HP} = V_G + \underbrace{\cancel{V_F}}_{=0} = mg\,2R$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 + \cancel{m}gs = \frac{1}{2}\cancel{m} v_{HP}^2 + 2\cancel{m}gR$$

$$V_{HP} = \sqrt{V_0^2 + g(s-2R)}$$

d) Wie groß muss die Anfangsgeschwindigkeit v_0 sein, damit die Murmel die Höhe h gerade so erreicht?

$$T_S + V_S \overset{!}{=} T_h + V_h$$

$$T_S = \frac{1}{2} m v_0^2 \quad , \quad V_S = mgs$$

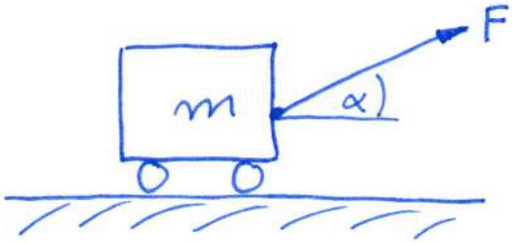
$$T_h \overset{!}{=} 0 \quad ; \quad V_h = mgh$$

$$\frac{1}{2}\cancel{m} v_0^2 + \cancel{m}gs = \cancel{m}gh$$

$$v_0 = \pm\sqrt{2g(h-s)}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

Aufgabe 4.8 – Fitnessübung



$\alpha = 60^\circ$

$F = 800\,N$

$\Delta t = 10\,s$

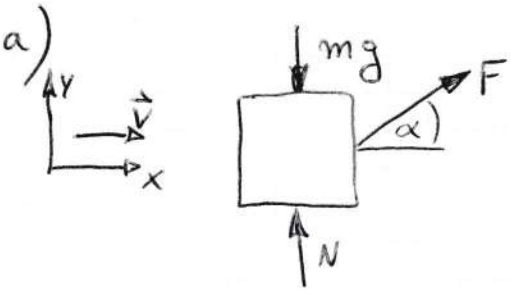
$m = 1\,t$

Bei einer Fitnessübung wird eine Masse m reibungsfrei unter Einwirkung der Kraft F entlang einer horizontalen Schiene gezogen.

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Masse nach $\Delta t = 10s$?

b) Wie groß ist die Normalkraft auf die Masse während der Bewegung?

a)



$F_x = \cos(\alpha) \cdot F$

$F_y = \sin(\alpha)\, F$

Impulserhaltung in x:

$$m \cdot v_{1x} + \int_{\Delta t} F_x \, dt = m\, v_{2x} \quad ; \quad v_{1x} = 0 \text{ (Start aus Ruhe)}$$

$$\int_0^{\Delta t} \cos(\alpha)\, F \, dt = m\, v_{2x}$$

$$\cos(\alpha)\, F\, (\Delta t - 0) = m\, v_{2x}$$

$$v_{2x} = \frac{\cos(\alpha)\, F\, \Delta t}{m} = 4\, \frac{m}{s}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

b) Impulserhaltung in y:

$$m \cdot v_{1y} + \int_0^{\Delta t} F_y \, dt = m v_{2y} \qquad \Big| \; v_{1y} = v_{2y} = 0$$

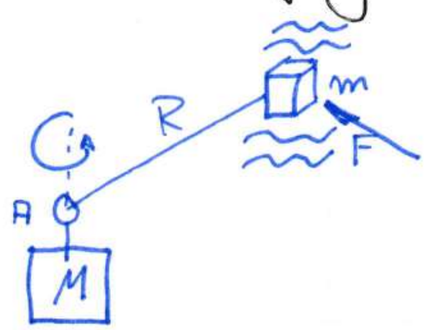
$$\int_0^{\Delta t} N - m \cdot g + \sin(\alpha) F \; dt = 0$$

$$(N - mg + \sin(\alpha) F) \Delta t = 0 \qquad \Big| : \Delta t$$

$$N - mg + \sin(\alpha) F = 0$$

$$N = mg - \sin(\alpha) F = 9{,}12 \text{ kN}$$

Aufgabe 4.9 - Zentrifuge



In einer neuartigen Zentrifuge werden die Proben mechanisch über einen Motor und über ein magnetisches Feld beschleunigt. Der Motor hat ein konstantes Drehmoment von 50 Nm, die magnetische Beschleunigung folgt dem Gesetz $F = 10 \frac{N}{s} t$. Die Probe wiegt 5 kg, der Drehradius ist $R = 0{,}5\,m$.
Wie schnell ist die Probe nach $t = 5\,s$?

$$L_0^{(A)} + \sum \int_0^t M \, dt = L_1^{(A)} \qquad \Big|\ L_0^{(A)} = 0 \text{, Ruhelage}$$

$$\int_0^t M \, dt + \int_0^t 10 \bar{t} R \, d\bar{t} = m v_1 R$$

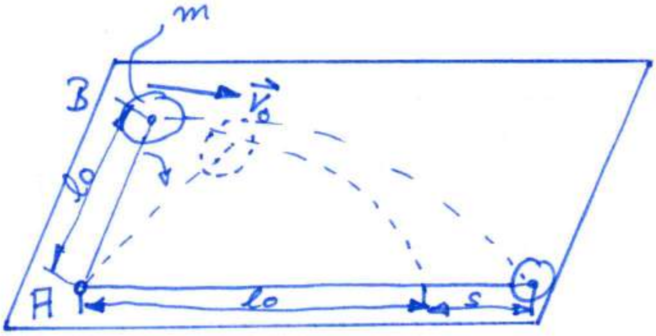
$$Mt + \frac{1}{2} 10 t^2 R = mR v_1 \qquad \Big|:(mR)$$

$$v_1 = \frac{1}{mR}\left(Mt + \frac{1}{2} 10 t^2 R\right)$$

$$v_1 = 125 \frac{m}{s}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	

Aufgabe 4.10 – Hockey Puck



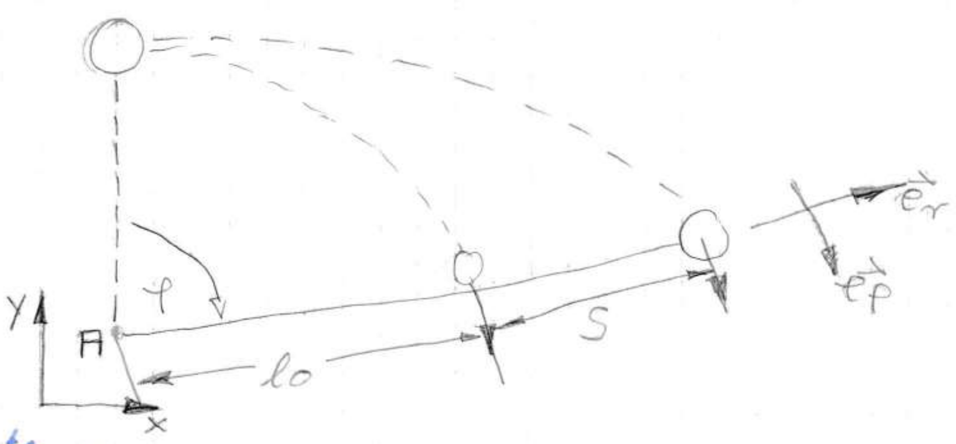
Ein Hockeypuck der Masse m bewegt sich reibungsfrei auf einer glatten horizontalen Fläche. Der Puck ist am Punkt A mit einem elastischen Seil der Federkonstante c und der ungedehnten Anfangslänge l_0 befestigt.
Die Bewegung startet im Punkt B mit der Anfangsgeschwindigkeit v_0 senkrecht zum Seil.

a) Ermitteln sie mit Hilfe des Drehimpulssatzes den Geschwindigkeitsanteil in Umfangsrichtung, wenn das Seil um s gedehnt wird.

b) Bestimmen Sie einen Zusammenhang zwischen der Dehnungsgeschwindigkeit $\dot{s}$ des Seils in Abhängigkeit der Dehnung s. Verwenden Sie den Energiesatz.

c) Ermitteln Sie mit dem Ansatz nach Newton die Bewegungsgleichung des Pucks in radialer Richtung
Hinweis: $r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	



1) $\int_{t_0}^{t_1} \vec{M}_{(A)}\, dt = \vec{L}_{1(A)} - \vec{L}_{0(A)} \stackrel{!}{=} 0$

weil A keine Momente aufnehmen kann

$$\vec{L}_{0(A)} = \vec{r} \times m\vec{v} = l_0 \vec{e}_r \times m v_0 \vec{e}_\varphi$$
$$= m l_0 v_0 \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_{1(A)} = (l_0+s)\vec{e}_r \times \left(m(l_0+s)\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi + m\dot{s}\vec{e}_r\right)$$

$$= m(l_0+s)^2 \dot{\varphi}\, \vec{e}_z$$

$$\vec{L}_{0(A)} \stackrel{!}{=} \vec{L}_{1(A)}$$

$$\cancel{m} l_0 v_0 \cancel{\vec{e}_z} \stackrel{!}{=} \cancel{m} (l_0+s)^2 \dot{\varphi} \cancel{\vec{e}_z}$$

$$\rightarrow \dot{\varphi} = \frac{l_0}{(l_0+s)^2} v_0 \quad \text{(tangentialer Anteil von } V_{abs}\text{)}$$

(✓)

2) gesucht: $\dot{s}_{(s)}$ über EES

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\cancel{\tfrac{1}{2}} m v_0^2 + 0 = \cancel{\tfrac{1}{2}} m v_{abs}^2 + \cancel{\tfrac{1}{2}} c s^2$$

$$v_{abs} = v_\varphi \vec{e}_\varphi + v_r \vec{e}_r$$

$$|v_{abs}| = \sqrt{v_\varphi^2 + v_r^2} \quad , \; v = \omega \cdot r$$

$$v_{abs}^2 = \dot{\varphi}^2 (l_0 + s)^2 + \dot{s}^2$$

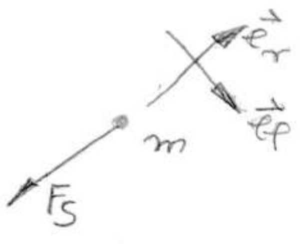
$$m v_0^2 = m \dot{\varphi}^2 (l_0 + s)^2 + m \dot{s}^2 + c s^2$$

$$\dot{s}^2 = v_0^2 - \dot{\varphi}^2 (l_0 + s)^2 - \frac{c}{m} s^2$$

$$\dot{s} = \sqrt{v_0^2 - \dot{\varphi}^2 (l_0 + s)^2 - \frac{c}{m} s^2}$$

$$\dot{s} = \sqrt{v_0^2 \left(1 - \frac{l_0^2}{(l_0 + s)^2}\right) - \frac{c}{m} s^2} = \dot{s}_{(s)}$$

3) Newton: $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$



$$F_S = c \cdot s$$

$$\vec{F} = -F_S \vec{e}_r = -c \cdot s \, \vec{e}_r$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\varphi} + 2 \dot{r} \dot{\varphi}) \vec{e}_\varphi$$

$$r = l_0 + s \quad , \; \dot{r} = \dot{s} \quad , \; \ddot{r} = \ddot{s}$$

skalare Auswertung:

$$(I)\quad -c\cdot s = m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)$$

$$-c\cdot s = m(\ddot{s} - (l_0+s)\dot{\varphi}^2)$$

$$-\frac{c}{m}s = \ddot{s} - (l_0+s)\dot{\varphi}^2$$

$$\ddot{s} = -\frac{c}{m}s + (l_0+s)\dot{\varphi}^2$$ → Ausdruck für $\dot{\varphi}$ finden

$$(II)\quad 0 = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi}) = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})$$

$$\rightarrow \frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}) = 0$$

$$\rightarrow r^2\dot{\varphi} = \text{konst}$$

$$r_0^2\dot{\varphi}_0 = r^2\dot{\varphi}$$

$$l_0^{\cancel{2}}\frac{v_0}{\cancel{l_0}} = (l_0+s)^2\dot{\varphi}$$

$$\dot{\varphi} = v_0\frac{l_0}{(l_0+s)^2}$$ ✓

⇒ Bewegungsgleichung

$$\ddot{s} = -\frac{c}{m}s + v_0^2\frac{l_0^2}{(l_0+s)^3}$$ ✓