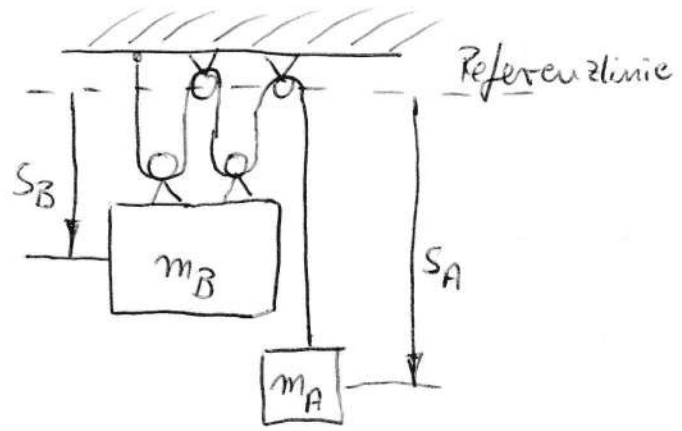
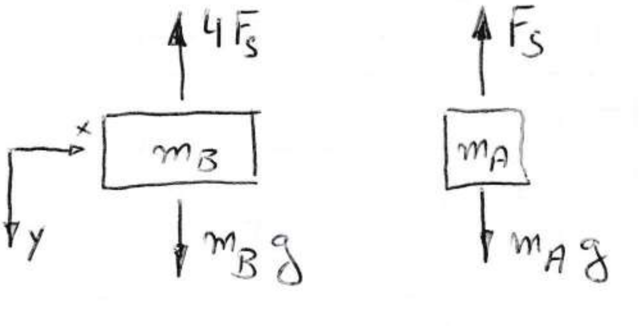
# Aufgabe 5.1 – Flaschenzug Arbeitssatz




Die Massen $m_A$ und $m_B$ sind über ein Flaschenzugsystem mit einem undehnbarem Seil miteinander verbunden. Das System wird aus der Ruhe freigegeben, $m_B$ ist dabei an der Referenzlinie. Bestimmen Sie die Strecke $s_B$ die von $m_B$ zurück gelegt wird, bis die Geschwindigkeit $v_B = 2\,\frac{m}{s}$ erreicht wird.
$(m_A = 15\,kg\ ;\ m_B = 120\,kg)$

Skizze:

Kraft im Seil ist Konst. $\stackrel{!}{=} F_S$




Seillänge:

$$s_A + 4 s_B = l = \text{Konst.}$$

Bewegung für beide Massen nach unten (Annahme)

Arbeitssatz: $\sum T_1 + \sum W_{12} = \sum T_2$

$\sum T_1 = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B1}^2 \quad | \; v_{A1} = v_{B1} = 0 \frac{m}{s}$

$\rightarrow \sum T_1 = 0$

$\sum W_{12} = \int F_A \, ds + \int F_B \, ds$

$= \int_0^{\Delta s_A} m_A g \, ds + \int_0^{\Delta s_B} m_B g \, ds$

$= m_A g \Delta s_A + m_B g \Delta s_B$

Alternativ: $W_G$

$W_G = + mg \Delta z$

$= + mg \Delta s$

$\hookrightarrow$ weil $\vec{e}_y$ und $\vec{g}$ gleiche Richtung, sonst negativ

$\sum T_2 = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2$

Seillänge konst $\rightarrow$ Verschiebung hebt sich auf

$s_A + 4 s_B = \text{konst}$

$\Delta s_A + 4 \Delta s_B = 0 \quad \rightarrow$ Ableiten weil $\Delta s = f(t)$

$\Delta v_A + 4 \Delta v_B = 0 \quad \rightarrow \Delta v_A = -4 \Delta v_B = -8 \frac{m}{s}$ (Richtung falsch angenommen, deshalb VZ negativ)

$\Rightarrow m_A g \overbrace{\Delta s_A}^{-4 \Delta s_B} + m_B g \Delta s_B = \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{2B}^2$

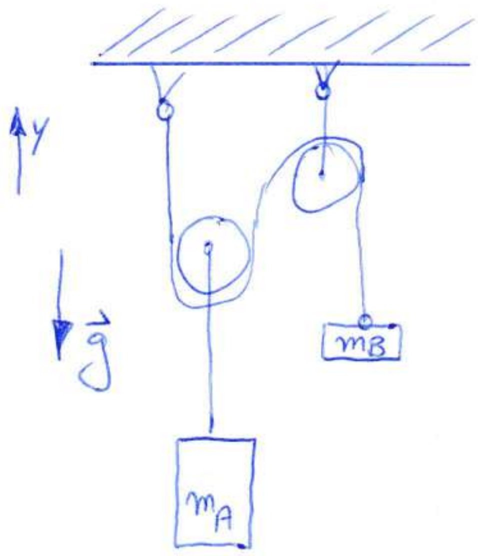
$\cancel{\Delta s_B = \frac{1}{m_B g} \left[ \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 - m_A g \Delta \right.}$

$\Delta s_B = \frac{1}{m_B g - 4 m_A g} \left[ \frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2 \right] = 1{,}2 \, m$

$\rightarrow \Delta s_A = 4{,}8 \, m$

| | Projekt: | Datum: | Pos.: | Seite: |
|---|---|---|---|---|
| | Name: | Revision: | Kap.: | 2/2 |

# Aufgabe 5.2 – Flaschenzug Energieerhaltung



$m_A = 50\,kg$ , $m_B = 20\,kg$

Die Gewichte A und B sind über ein undehnbares Seil miteinander verbunden. Das System wird aus der Ruhe freigegeben. Welche Strecke hat das Gewicht A zurück gelegt, wenn die Geschwindigkeit $v_A = 5\,\frac{m}{s}$ erreicht wird? Wie groß ist dann die Zugkraft im Halteseil von A?

a) gesucht: $s_{(v)} \rightarrow$ EES (Konservatives System)

Längenänderung $\stackrel{!}{=} 0 \rightarrow 2 s_A + s_B = l = \text{Konst}$

$2\Delta s_A + \Delta s_B = 0 \rightarrow 2\Delta s_A = -\Delta s_B$

$$2\Delta s_A = -\Delta s_B \quad \Big| \frac{d}{dt}$$
$$2\Delta v_A = -\Delta v_B \quad \Big| \frac{d}{dt}$$
$$2\Delta a_A = -\Delta a_B$$

EES: $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$ | Ruhelage $\Rightarrow T_1 = V_1 = 0$

$$0 = T_2 + V_2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2$$

$$V_2 = -m_A g s_A - m_B g s_B$$

| | Projekt: | Datum: | Pos.: | Seite: |
|---|---|---|---|---|
| | Name: | Revision: | Kap.: | 1/2 |

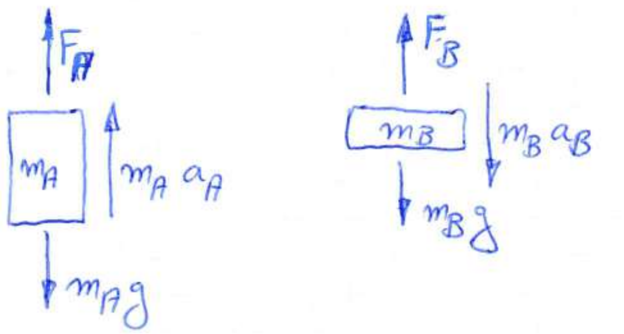
$$0 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 - m_A g s_A - m_B g s_B$$

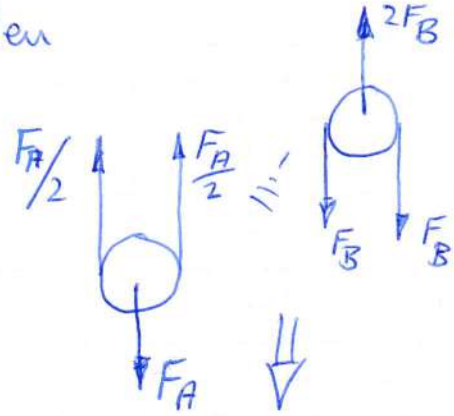
$$0 = \frac{1}{2} m_A v_A^2 + 2 m_B v_A^2 - m_A g s_A + 2 m_B g s_A$$

$$s_A (m_A g - 2 m_B g) = v_A^2 \left(\frac{1}{2} m_A + 2 m_B\right)$$

$$s_A = \frac{v_A^2}{g(m_A - 2m_B)} \left(\frac{1}{2} m_A + 2 m_B\right) = 16{,}25\,m$$

b) Freischnitt der Massen und Rollen




$$\Downarrow$$

$$\boxed{\frac{F_A}{2} \overset{!}{=} F_B}$$

(I) $0 = m_A g - F_A - m_A a_A$ (nach unten)

(II) $0 = F_B - m_B g - m_B a_B$ (nach oben)

$\hookrightarrow 0 = \frac{F_A}{2} - m_B g - m_B\, 2a_A$

$$F_A = 2 m_B g + 4 m_B a_A \quad (\text{II})$$

(II) in (I) : $0 = m_A g - (2 m_B g + 4 m_B a_A) - m_A a_A$

$$\Longrightarrow a_A = \frac{m_A g - 2 m_B g}{4 m_B + m_A} = \underline{0{,}77\,\frac{m}{s^2}}$$

aus (I): $F_A = m_A g - m_A a_A = \underline{\underline{461{,}5\,N}}$

# Aufgabe 5.3 - Billard Impulserhaltung

Bei einem Billardspiel ergibt sich die Situation, dass sich eine Rote und eine Blaue Kugel in der Mitte des Tisches gerade so berühren. Der Spieler stößt die weiße Kugel in gerader Achse mit der Geschwindigkeit $v$ in Richtung der ruhenden Kugeln. Die Stoßzahl sei mit $\varepsilon$ gegeben. Welche allgemeine Geschwindigkeit hat die Kugel "Rot" nach dem Stoß? Welche Besonderheit ergibt sich bei der Stoßzahl von $\varepsilon = 1$?


→ Betrachtung der Stöße nacheinander

1) Weiß mit Blau $\qquad m_W \stackrel{!}{=} m_B \stackrel{!}{=} m_R$

Impulserhaltung: $\cancel{m_W} \cdot v_{W1} + \underbrace{\cancel{m_B} \cdot v_{B1}}_{=0} = \cancel{m_W}\, v_{W2} + \cancel{m_B}\, v_{B2}$

$$v_{W1} = v = v_{W2} + v_{B2}$$

Stoßzahlgleichung: $\varepsilon = \dfrac{v_{B2} - v_{W2}}{v - 0} \quad \rightarrow v_{W2} = v_{B2} - \varepsilon \cdot v$

$$\rightarrow v = (v_{B2} - \varepsilon \cdot v) + v_{B2}$$

$$v = 2 v_{B2} - \varepsilon \cdot v \quad | + \varepsilon \cdot v \quad | : 2$$

$$\Rightarrow v_{B2} = \frac{v}{2}(\varepsilon + 1)$$

$$v_{W2} = \frac{v}{2}(\varepsilon + 1) - \varepsilon \cdot v = \frac{v}{2}(1 - \varepsilon)$$

2) Blau mit Rot

$$\cancel{m} \cdot v_{B2} + \cancel{m \cdot \underbrace{v_{R2}}_{=0}} = \cancel{m}\, v_{B3} + \cancel{m}\, v_{R3}$$

$$v_{B2} = v_{B3} + v_{R3}$$

Stoßzahlgleichung: $\varepsilon = \frac{v_{R3} - v_{B3}}{v_{B2} - 0}$

$$\rightarrow v_{B3} = v_{R3} - \varepsilon\, v_{B2}$$

$$\Rightarrow v_{B2} = (v_{R3} - \varepsilon\, v_{B2}) + v_{R3} \quad \Big|\ + \varepsilon\, v_{B2} \quad \Big|\ :2$$

$$v_{R3} = \frac{1}{2} v_{B2} (1 + \varepsilon) \qquad \Big|\ v_{B2} = \frac{v}{2}(\varepsilon + 1)$$

$$\underline{\underline{v_{R3} = \frac{v}{4}(1+\varepsilon)^2}} \checkmark$$

$$v_{B2} = v_{R3} - \varepsilon\, v_{B2} = \frac{v}{4}(1+\varepsilon)^2 - \frac{v}{2}(\varepsilon+1)\cdot\varepsilon$$

$$v_{B2} = \frac{v}{2}\left[\frac{1}{2}(1+2\varepsilon+\varepsilon^2) - \varepsilon^2 - \varepsilon\right]$$

$$v_{B2} = \frac{v}{2}\left[\frac{1}{2} \cancel{+\varepsilon} + \frac{1}{2}\varepsilon^2 - \varepsilon^2 \cancel{-\varepsilon}\right]$$

$$v_{B2} = \frac{v}{2}\left[-\frac{1}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{2}\right] = \frac{v}{4}(1+\varepsilon)(1-\varepsilon) \checkmark$$

Sonderfall $\varepsilon = 1$

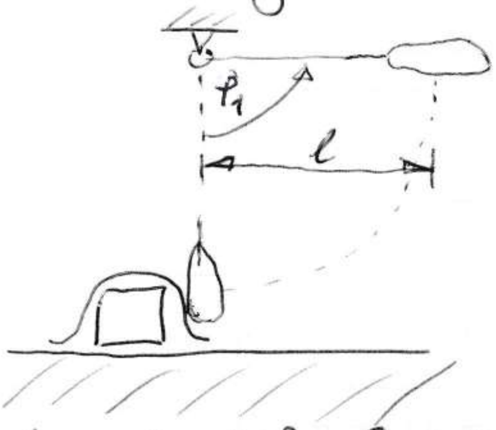
$$\rightarrow v_{R3} = \frac{v}{4}(1+\varepsilon)^2 = \frac{v}{4}(1+1)^2 = v$$

$\Rightarrow$ vollelastischer Stoß $\rightarrow$ Impulserhaltung

| | Projekt: | Datum: | Pos.: | Seite: |
|---|---|---|---|---|
| | Name: | Revision: | Kap.: | 2/2 |

Aufgabe 5.4 – Sicherheitstest für Schutzhelm

Bei einem Sicherheitstest für Schutzhelme wird ein Sandsack mit der Masse $m_A = 10\,kg$ über eine Pendelbewegung seitlich auf den Helm mit Messtechnik geführt. Die Einheit aus Helm und Messtechnik hat eine Masse von $m_B = 27\,Kg$ und kann sich reibungsfrei auf dem Messtisch bewegen.




$\ell = 1\,m$, $\varphi_1 = 90°$, $\varepsilon = 0{,}5$

a) Mit welcher Geschwindigkeit trifft der Sandsack den Helm?

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit von Sandsack und Helm nach dem Stoß

c) Wie groß ist der Energieverlust im Stoß?

1) Energieerhaltung

$$\underbrace{\cancel{T_0}}_{=0} + V_0 = T_1 + \underbrace{\cancel{V_1}}_{=0}$$

$$\cancel{m_A} g\,\ell = \frac{1}{2} \cancel{m_A} v_{A1}^2$$

$$\rightarrow v_{A1} = \sqrt{2 g \ell} = 4{,}43\,\frac{m}{s}$$

| | Projekt: | Datum: | Pos.: | Seite: |
|---|---|---|---|---|
| | Name: | Revision: | Kap.: | |

2) Impuls für Stoß

$$m_A \cdot v_{A1} = m_A \cdot v_{A2} + m_B \cdot v_{B2}$$

Stoßzahlgleichung: $\varepsilon = \dfrac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - \underbrace{v_{B1}}_{=0}}$

$$\rightarrow v_{B2} = v_{A1}\,\varepsilon + v_{A2}$$

$$m_A \cdot v_{A1} = m_A \cdot v_{A2} + m_B\,(v_{A1}\,\varepsilon + v_{A2})$$

$$m_A\, v_{A1} = m_A\, v_{A2} + m_B\,\varepsilon\, v_{A1} + m_B\, v_{A2}$$

$$v_{A1}(m_A - \varepsilon\, m_B) = v_{A2}\,(m_A + m_B)$$

$$v_{A2} = v_{A1}\,\frac{m_A - \varepsilon\, m_B}{m_A + m_B} = -0{,}42\ \frac{m}{s}$$

$\hookrightarrow$ Bewegung nach oben!

$$v_{B2} = v_{A1}\,\varepsilon + v_{A2} = 1{,}8\ \frac{m}{s}$$

3) Energieverlust

$$\Delta T = T_1 - T_2$$

$$\Delta T = \frac{1}{2} m_A v_{A1}^2 - \left[\frac{1}{2} m_A v_{A2}^2 + \frac{1}{2} m_B v_{B2}^2\right] = 53{,}5\ J$$

| | Projekt: | Datum: | Pos.: | Seite: |
|---|---|---|---|---|
| | Name: | Revision: | Kap.: | |

# Aufgabe 5.5 – Pendelkugeln

Zwei Kugeln mit den Massen $m_A$ und $m_B$ sind in unterschiedlichen Höhen aufgehängt, wobei sich die Schwerpunkte auf einer Linie befinden. Die Kugel A wird um den Winkel $\alpha_1$ ausgelenkt und unter Wirkung der Gravitation freigegeben. Kugel B befindet sich bei $\alpha_2 = 0°$ in Ruhe. Die Stoßzahl $\varepsilon$ sei bekannt.

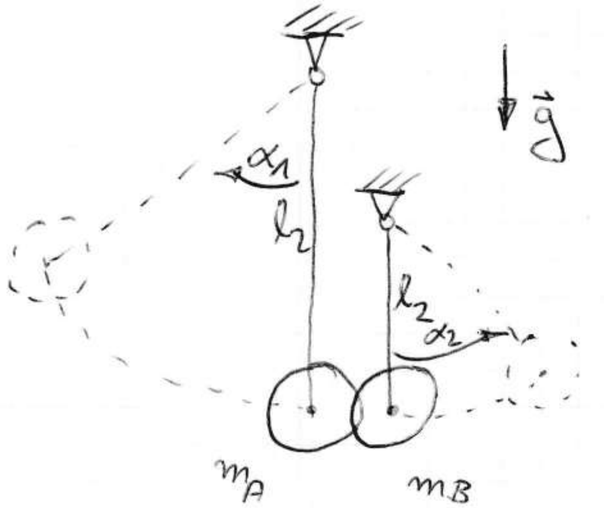
a) Mit welcher Geschwindigkeit trifft Kugel A auf B?

b) Welche Geschwindigkeiten haben die Kugeln nach dem Stoß?

c) Bis zu welchem Winkel $\alpha_2$ wird Kugel B ausgelenkt?

d) Wie muss das Längenverhältnis $\frac{l_1}{l_2}$ eingestellt werden, damit Kugel B gerade so die Überkopflage erreicht?

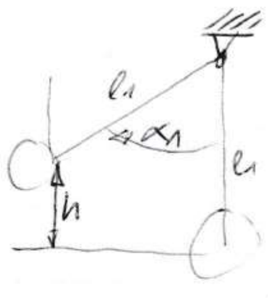
$(m_A \stackrel{!}{=} m_B \stackrel{!}{=} m, \ \alpha_1 = 60°, \ \varepsilon = \frac{1}{2})$



a) Energieerhaltung

$$\underbrace{\cancel{T_0}}_{=0} + V_0 = T_1 + \underbrace{\cancel{V_1}}_{=0}$$

$$V_0 = m\,g\,h$$




$$h = l_1 - \cos(\alpha_1)\, l_1$$

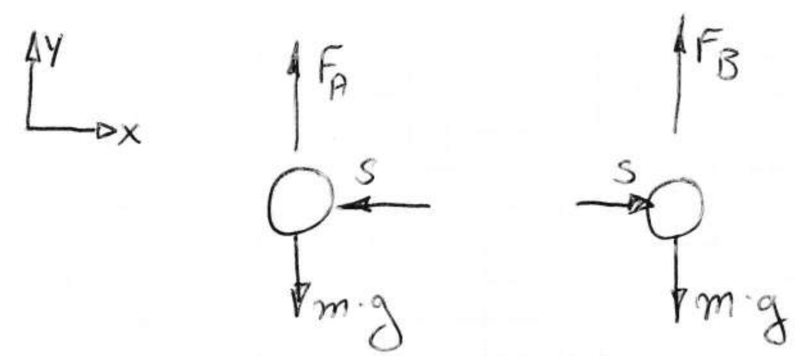
$$h = l_1\left(1-\cos(\alpha_1)\right)$$

$$V_0 = m\,g\,l_1\left(1-\cos(\alpha_1)\right) \quad ; \quad T_1 = \frac{1}{2} m\, v_{A1}^2$$

$$\cancel{m}\,g\,l_1\left(1-\cos(\alpha_1)\right) = \frac{1}{2}\cancel{m}\, v_{A1}^2$$

$$v_{A1} = \sqrt{2 g l_1 \left(1-\cos(\alpha_1)\right)}$$

b) Stoß und Impuls




S = Stoßkraft

Stoßrelevante Kräfte: $S$, $F_A$, $F_B$

Nicht stoßrelevant: Gewicht, weil zeitlich nur von kurzer Bedeutung

Kraftvektor pro Kugel:

$$\vec{F}_{KA} = -S\,\vec{e}_x + F_A\,\vec{e}_y$$

$$\vec{F}_{KB} = S\,\vec{e}_x + F_B\,\vec{e}_y$$

Impulssatz: $\int_{t_0}^{t_1} \vec{F}\, dt = \hat{F} = m(v_2 - v_1)$

Auswertung in Stoßrichtung $\vec{e}_x$

$$K1: \ -\int_{t_0}^{t_1} S \, dt = -\hat{S} = m\left(v_{A2} - v_{A1}\right) \quad (1)$$

$$K2: \ \int_{t_0}^{t_1} S \, dt = +\hat{S} = m\left(v_{B2} - \underbrace{\cancel{v_{B1}}}_{=0,\ AB}\right) \quad (2)$$

$$(1)+(2): \quad 0 = \cancel{m}\left(v_{A2} - v_{A1}\right) + \cancel{m}\, v_{B2} \qquad | \, m \neq 0$$

$$0 = v_{A2} - v_{A1} + v_{B2} \quad (3)$$

Stoßzahlgleichung: $\varepsilon = \dfrac{v_{B2} - v_{A2}}{v_{A1} - \underbrace{\cancel{v_{B1}}}_{=0,\ AB}}$

$$\rightarrow v_{B2} = v_{A1}\,\varepsilon + v_{A2} \quad (4)$$

$$\Rightarrow \quad 0 = v_{A2} - v_{A1} + v_{A1}\,\varepsilon + v_{A2}$$

$$v_{A2} = \frac{1}{2} v_{A1} (1 - \varepsilon)$$

$$v_{B2} = v_{A1}\,\varepsilon + \frac{1}{2} v_{A1} (1 - \varepsilon)$$

$$v_{B2} = \frac{1}{2} v_{A1} (1 + \varepsilon)$$

c) Energieerhaltung: (für Kugel B nach Stoß)

$$T_2 + \underbrace{\cancel{V_2}}_{=0} = \underbrace{\cancel{T_3}}_{=0} + V_3$$

$$\frac{1}{2} \cancel{m}\, v_{B2}^2 = \cancel{m}\, g\, h_2 \qquad | \ h_2 = l_2 \left(1 - \cos(\alpha_2)\right)$$

$$\frac{1}{2} v_{B2}^2 = g\, l_2 \left(1 - \cos(\alpha_2)\right)$$

| | Projekt: | Datum: | Pos.: | Seite: |
|---|---|---|---|---|
| | Name: | Revision: | Kap.: | 3/4 |

$$\frac{1}{2} v_{B2}^2 = g \ell_2 (1 - \cos(\alpha_2))$$

$$\frac{1}{2g\ell_2} v_{B2}^2 = 1 - \cos(\alpha_2)$$

$$\cos(\alpha_2) = 1 - \frac{1}{2g\ell_2} v_{B2}^2 \qquad | \cos^{-1}(\ldots)$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{2g\ell_2} v_{B2}^2\right)$$

mit $v_{B2} = \frac{1}{2} v_{A1} (1 + \varepsilon)$

und $v_{A1} = \sqrt{2g\ell_1(1 - \cos(\alpha_1))}$

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(1 - \frac{1}{\cancel{2g}\ell_2} \frac{1}{4} \cancel{2g} \ell_1 (1 - \cos(\alpha_1)) (1 + \varepsilon)^2\right)$$

$$\alpha_2 = \cos^{-1}\left(1 - \frac{\ell_1}{\ell_2}(1 - \cos(\alpha_1))(1 + \varepsilon)^2\right)$$

d) überkopflage: $\alpha_2 \overset{!}{=} 180° = \pi$

$$\pi = \cos^{-1}(\ldots) \qquad | \cos(\ldots)$$

$$-1 = 1 - \frac{\ell_1}{\ell_2}\left(1 - \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{2}\right)^2$$

$$\cancel{-}2 = \cancel{-}\frac{\ell_1}{\ell_2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$2 = \frac{\ell_1}{\ell_2}\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{9}{4} = \frac{\ell_1}{\ell_2} \cdot \frac{9}{8} \qquad | \cdot \frac{8}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{\ell_1}{\ell_2} = 2 \cdot \frac{8}{9} = \frac{16}{9}$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | Projekt: | Datum: | Pos.: | Seite: |
| | Name: | Revision: | Kap.: | 4\|4 |

# Aufgabe 5.6 - Defekte Gasflasche

Beim Abladen von Campinggasflaschen für einen Baumarkt fällt eine der Flaschen vom LKW auf den Boden. Beim Aufprall auf den Boden wird die Flasche so beschädigt, dass die Schweißnaht des Ventils ringsum reißt und ein kreisrundes zentrisches Loch entsteht. Das ausströmende Gas beschleunigt die Gasflasche senkrecht in die Luft. Die leere Gasflasche habe ein Gewicht von $m_F = 7\,kg$, das ausströmende Gas wiege $m_G = 5\,kg$, die Ausströmgeschwindigkeit sei konstant und betrage $v_0 = 250\,\frac{m}{s}$. $\left(g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2},\ \frac{dm}{dt} = 1\,\frac{kg}{s}\right)$

a) Wie groß ist die Geschwindigkeit der Gasflasche nach $t = 2\,s$?

b) Wie groß ist die maximale Geschwindigkeit?

c) Wie groß ist die maximale Beschleunigung?

a) aus: $F = M\,\frac{dv}{dt} - \frac{dm}{dt}(v + v_0)$

folgt: $v_{(t)} = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt$

mit $m_0 = m_F + m_G = 12\,kg$, $V_0 = 250\,\frac{m}{s}$, $c = 1\,\frac{kg}{s}$

$$\underline{V_{(t=2s)} = 25{,}96\,\frac{m}{s}}$$

b) $V_{max}$ bei $t_{max}$ wenn alles Gas ausgeströmt

$t_{max} = \frac{m_G}{c} = \frac{5\,kg}{1\,\frac{kg}{s}} = 5\,s$, $V_{max} = V_{(t=5s)} = 85{,}7\,\frac{m}{s}$

c) $v_{(t)} = v_0 \ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt$

$a_{(t)} = \frac{d}{dt}\left(v_{(t)}\right)$

$a_{(t)} = v_0 \left[\frac{\cancel{m_0} - ct}{\cancel{m_0}} \cdot \cancel{m_0} \cdot (\cancel{-}1) \cdot (m_0 - ct)^{-2} \cdot (\cancel{-}c)\right] - g$

$a_{(t)} = v_0 \cdot \frac{1}{m_0 - ct} - g$

$a_{(t=5s)} = \underline{25{,}9 \, \frac{m}{s^2}}$

g-Faktor: $\frac{25{,}9}{9{,}81} = 2{,}6g$