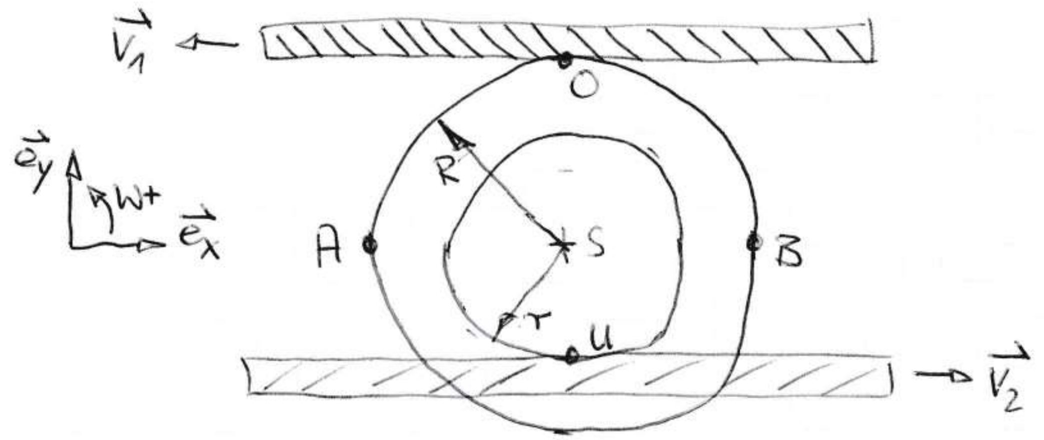
Aufgabe 6.1 Zahnstangentrieb

Ein doppeltes Stirnrad mit den Radien r und R ist mit zwei Zahnstangen verbunden, die sich mit v_1 in negative x-Richtung und v_2 in positive x-Richtung bewegen.

a) Bestimmen Sie die Schwerpunktgeschwindigkeit $\vec{v}_s$ und die Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$ des Stirnrades

b) Wie groß ist die Geschwindigkeit in den Punkten A und B?



Bekannt: $\vec{\omega} = \omega \vec{e}_z$

$$\vec{v}_o^{SR} \stackrel{!}{=} \vec{v}_o^{ZS} = -v_1 \vec{e}_x$$

$$\vec{v}_u^{SR} \stackrel{!}{=} \vec{v}_u^{ZS} = v_2 \vec{e}_x$$

Kinematische Grundgleichung für ebene Bewegung starrer Körper:

$$\vec{v}_Q = \vec{v}_P + {}^I\vec{\omega}^R \times \vec{r}_{rel}$$

oben: $\vec{v}_s = \vec{v}_o^{SR} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{os} = -v_1 \vec{e}_x + \overbrace{\omega \vec{e}_z \times (-R \vec{e}_y)}^{-\vec{e}_x} = (\omega R - v_1)\vec{e}_x$

unten: $\vec{v}_s = \vec{v}_u^{SR} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{us} = v_2 \vec{e}_x + \overbrace{\omega \vec{e}_z \times r \vec{e}_y}^{-\vec{e}_x} = (v_2 - \omega r)\vec{e}_x$

unbekannt: $\vec{v}_s$ und ω

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	1/2

aus Koeffizientenvergleich folgt:

$$\omega R - v_1 = v_2 - \omega r \quad | + \omega r \; | + v_1$$
$$\omega (R + r) = v_1 + v_2 \quad | : (R + r)$$
$$\omega = \frac{v_1 + v_2}{R + r}$$
$$\Rightarrow \vec{\omega} = \frac{v_1 + v_2}{R + r} \vec{e}_z$$

$$\vec{v}_S = \left(\frac{v_1 + v_2}{R + r} R - v_1 \right) \vec{e}_x$$

b)
$$\vec{v}_A = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{SA}$$
$$\vec{v}_A = \left(\frac{v_1 + v_2}{R + r} R - v_1 \right) \vec{e}_x + \omega \underbrace{\vec{e}_z \times (-R \vec{e}_x)}_{\vec{e}_y}$$
$$\vec{v}_A = \left(\frac{v_1 + v_2}{R + r} R - v_1 \right) \vec{e}_x - \omega R \vec{e}_y$$

$$\vec{v}_B = \vec{v}_S + \vec{\omega} \times \vec{r}_{SB}$$
$$\vec{v}_B = \left(\frac{v_1 + v_2}{R + r} R - v_1 \right) \vec{e}_x + \omega \underbrace{\vec{e}_z \times R \vec{e}_x}_{\vec{e}_y}$$
$$\vec{v}_B = \left(\frac{v_1 + v_2}{R + r} R - v_1 \right) \vec{e}_x + \omega R \vec{e}_y$$

Aufgabe 6.2 - Rundbiegemaschine

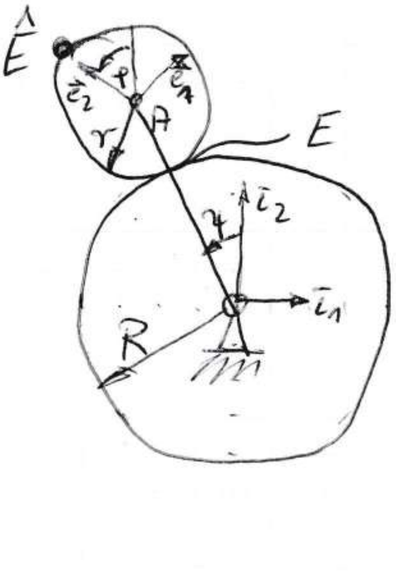
Eine Rundbiegemaschine besteht aus der kleinen Biegerolle, der großen Anschlagrolle und einer Koppelstange. Der Winkel ψ beschreibt die Verdrehung der Stange gegenüber dem raumfesten Koordinatensystem I. Die Rollen sind in den Verbindungspunkten reibungsfrei drehbar gelagert. Der Punkt $\hat{E}$ bezeichnet einen festen Punkt auf der kleinen Rolle, während E den momentanen Kontaktpunkt beschreibt

a) Bestimmen Sie den Ortsvektor $\vec{r}_{\hat{E}}$.

b) Bestimmen Sie durch Ableitung von $\vec{r}_{\hat{E}}$ die Geschwindigkeit $\vec{v}_{\hat{E}}$ in Abhängigkeit von $\dot{\psi}$ und $\dot{\varphi}$.

c) Bestimmen Sie die Geschwindigkeit $\vec{v}_{\hat{E}}$ über die Anwendung der kinematischen Grundgleichung.

d) Für den Zeitpunkt in dem $E = \hat{E}$: Bestimmen Sie $\dot{\varphi}$ als $f(\dot{\psi})$



	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	11

a) $\vec{r}_{\hat{E}} = \vec{r}_A + \vec{r}_{A\hat{E}}$

$$\vec{r}_{\hat{E}} = (R+r)\left(-\sin(\psi)\,\vec{i}_1 + \cos(\psi)\,\vec{i}_2\right) + r\,\vec{e}_2$$

b) $\vec{v}_{\hat{E}} = \frac{{}^I d}{dt}\left(\vec{r}_{\hat{E}}\right) = \frac{{}^I d\,\vec{r}_A}{dt} + \frac{{}^E d\,\vec{r}_{AE}}{dt} + {}^I\vec{\omega}^E \times \vec{r}_{A\hat{E}}$

$$\vec{v}_{\hat{E}} = (R+r)\,\dot{\psi}\left(-\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2\right) + \overbrace{\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times r\,\vec{e}_2}^{-\vec{e}_1}$$

$$\vec{v}_{\hat{E}} = (R+r)\,\dot{\psi}\left(-\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2\right) - r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$$

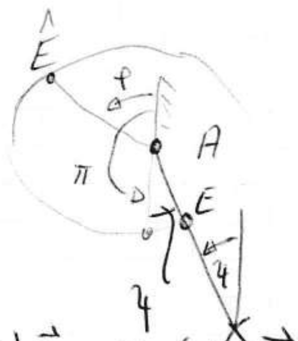
c) $\vec{v}_{\hat{E}} = \vec{v}_A + {}^I\vec{\omega}^E \times \vec{r}_{A\hat{E}}$

$\vec{v}_A \rightarrow$ Kreisbewegung $\quad \vec{v}_A = \dot{\psi}\,(R+r)\left(-\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2\right)$

$$\vec{v}_{\hat{E}} = (R+r)\,\dot{\psi}\left(-\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2\right) + \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times r\,\vec{e}_2$$

$$\vec{v}_{\hat{E}} = (R+r)\,\dot{\psi}\left(-\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2\right) - r\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_1$$

d) Kontaktpunkt ist Momentanpol



$\vec{v}_{\hat{E}} = \vec{v}_E = \vec{0} \qquad \varphi = \pi + \psi$

$$\vec{k}_1 = \cos(\varphi)\,\vec{i}_1 + \sin(\varphi)\,\vec{i}_2$$

$$\vec{k}_1 = \cos(\pi+\psi)\,\vec{i}_1 + \sin(\pi+\psi)\,\vec{i}_2 = -\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2$$

$$\rightarrow \vec{v}_E = \vec{0} = (R+r)\,\dot{\psi}\left(-\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2\right) - r\,\dot{\varphi}\left(-\cos(\psi)\,\vec{i}_1 - \sin(\psi)\,\vec{i}_2\right)$$

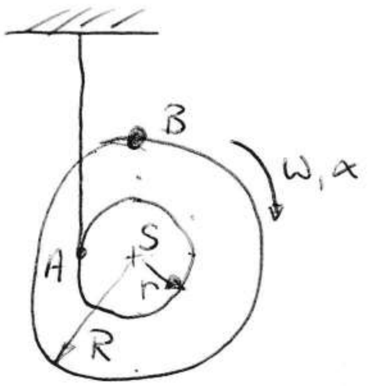
Skalare Auswertung: $(R+r)\,\dot{\psi} - r\,\dot{\varphi} = 0$

$$\Rightarrow \dot{\varphi} = \frac{R+r}{r}\,\dot{\psi} = \dot{\varphi}(\dot{\psi})$$

Aufgabe 6.3 – Aufgehängte Rolle

Eine Rolle mit aufgewickeltem Seil ist an der Decke befestigt und wird aus der Ruhe heraus los gelassen. Das Seil ist undehnbar. Wie groß ist die Beschleunigung des rollenfesten Punktes B?

$r = 150\,mm$, $R = 250\,mm$, $\omega = 3\,\frac{rad}{s}$ $\alpha = 5\,\frac{rad}{s^2}$



Beschleunigung des Schwerpunktes:

→ Drehung von S um A, A ist Momentanpol

$$\vec{a}_S = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{SA} - \omega^2 \vec{r}_{SA}$$

$$\vec{a}_A = a_A \vec{e}_y \quad ; \quad \vec{\alpha} = -\alpha \vec{e}_z \quad ; \quad \vec{r}_{SA} = -r\vec{e}_x$$

$$\vec{a}_S = a_A \vec{e}_y - \overbrace{\alpha \vec{e}_z \times (-r\vec{e}_x)}^{\vec{e}_y} + \omega^2 r \vec{e}_x$$

$$\vec{a}_S = (a_A + \alpha r)\vec{e}_y + \omega^2 r \vec{e}_x \quad \Big| \quad \vec{a}_S = -a_S \vec{e}_y$$

Skalare Auswertung: $-a_S = a_A + \alpha r$ | Momentanpol: $a_A = 0$

$$\rightarrow a_S = -\alpha r \quad ; \quad \vec{a}_S = -\alpha r \vec{e}_y$$

Kinematische Grundgleichung: $\vec{a}_B = \vec{a}_S + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{BS} - \omega^2 \vec{r}_{BS}$

$$\vec{a}_B = -\alpha r \vec{e}_y - \overbrace{\alpha \vec{e}_z \times R\vec{e}_y}^{-\vec{e}_x} - \omega^2 R \vec{e}_y$$

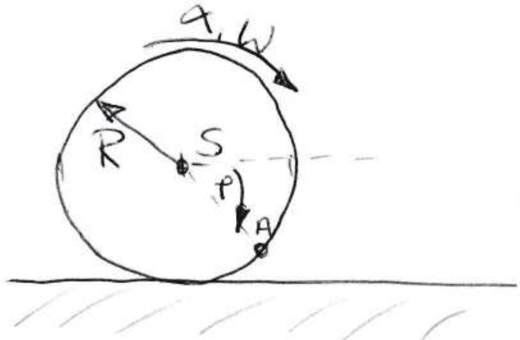
$$\vec{a}_B = -\alpha r \vec{e}_y + \alpha R \vec{e}_x - \omega^2 R \vec{e}_y$$

$a_{Bx} = \alpha R = 1{,}25\,\frac{m}{s^2}$ $\qquad a_{By} = -\alpha r - \omega^2 R = 3\,\frac{m}{s^2}$

$$|a_B| = \sqrt{a_{Bx}^2 + a_{By}^2} = 3{,}25 \ \frac{m}{s^2}$$

$$\Theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{By}}{a_{Bx}}\right) = 67{,}38^\circ$$

Aufgabe 6.4 - Rollende Scheibe



Ein Zylinder mit Radius R erfährt die Winkelgeschwindigkeit ω und die Winkelbeschleunigung α. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Schwerpunktes S, wenn der Zylinder ohne gleiten horizontal abrollt.

Lösung über Momentanpol:

$$\vec{v}_A = 0 \rightarrow \vec{v}_S = \underbrace{\cancel{\vec{v}_A}}_{=0} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{SA} \quad \Big| \quad \vec{\omega} = -\omega \vec{e}_z, \quad \vec{r}_{SA} = R\,\vec{e}_y$$

$$\vec{v}_S = \begin{pmatrix} v_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\omega \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\rightarrow v_S = \omega R \Rightarrow \vec{v}_S = \omega R\,\vec{e}_x$ $\rightarrow$ horizontale Bewegung

$$\vec{a}_S = \vec{a}_A + \vec{\alpha} \times \vec{r}_{SA} - \omega^2 \vec{r}_{SA}$$

$\vec{a}_S = a_S\,\vec{e}_x$ $\rightarrow$ horizontale Bewegung

$\vec{a}_A = a_A\,\vec{e}_y$ $\rightarrow$ Bewegum am Kontaktpunk: $\pm\,\vec{e}_y$-Richtung

$$\vec{a}_S = \begin{pmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 R \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_S = \begin{pmatrix} a_S \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ a_A \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \omega^2 R \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \vec{a}_S &= \alpha R\,\vec{e}_x \\ \vec{a}_A &= \omega^2 R\,\vec{e}_y \end{aligned}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	