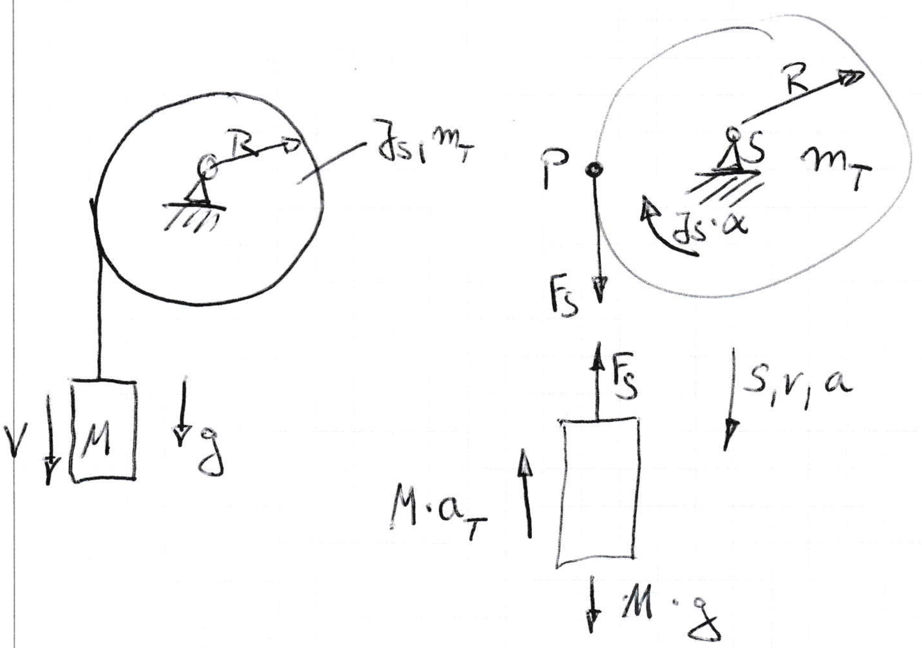
Aufgabe 7.1 - Krantrommel

Ein Baustellenkran lässt ein Gewicht der Masse $M = 200\,kg$ von einem Dach nach unten. Die Seiltrommel hat den Radius $R = 0{,}5\,m$ und wiegt $m_T = 600\,kg$. Das Gewicht des Seils und dessen Dehnung sei vernachlässigbar.
$(g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2})$

a) Wie groß ist die Winkelbeschleunigung α der Seiltrommel?
b) Wie groß ist die Kraft im Seil?

a) Freischnitt



gesucht: Bewegungsgleichung

$J_S = R^2 m_T$

(I) $\sum M_{(S)} = 0 = F_S \cdot R - J_S \cdot \alpha$

$$F_S = \frac{J_S \cdot \alpha}{R}$$

$$(\mathrm{II})\quad \sum F_y = 0 \qquad (\text{Für Gewicht})$$

$$0 = F_S + M \cdot a_T - M \cdot g \qquad \Big| \; a_T = \alpha \cdot R \quad \text{weil Kreisbewegung}$$

$$F_S = Mg - M\alpha R \qquad (\mathrm{II})$$

$$\Rightarrow \quad J_S \, \frac{\alpha}{R} = Mg - M\alpha R \qquad \big| \cdot R$$

$$J_S \, \alpha = MgR - M\alpha R^2 \qquad \big| + M\alpha R^2$$

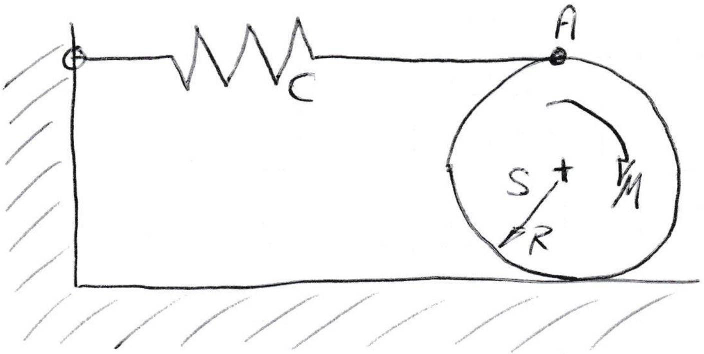
$$\alpha \left(J_S + MR^2 \right) = MgR$$

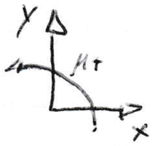
$$\alpha = \frac{MgR}{J_S + MR^2} = \frac{Mg\cancel{R}}{R^{\cancel{2}}(m_T + M)} = \frac{Mg}{R(m_T + M)}$$

$$\alpha = 4{,}91 \, \frac{\text{rad}}{s^2} \quad , \quad a_T = 2{,}46 \, \frac{m}{s^2}$$

$$b) \quad F_S = \frac{J_S \, \alpha}{R} = \frac{R^{\cancel{2}} m_T \, \alpha}{\cancel{R}} = 1473 \, N$$

Aufgabe 7.2 – Rad mit Feder

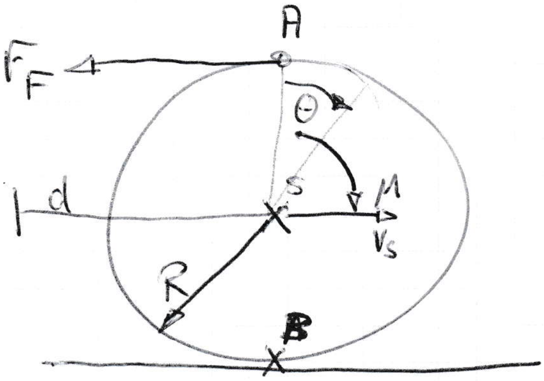




$c = 150\,\frac{N}{m}$, $R = 0{,}2\,m$

$r_T = 0{,}15\,m$

Ein Rad ist über eine Feder mit der Wand verbunden. Die Feder hat die Federkonstante c und kann sich in den Befestigungspunkten frei drehen. Das Rad hat die Masse $m = 25\,kg$ und den Trägheitsradius r_T. Auf das Rad wirkt das Moment $M = 20\,Nm$. Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit wenn der Schwerpunkt die Strecke $d = 0{,}1\,m$ zurückgelegt hat? Das Rad rollt ohne zu gleiten, die Feder ist in der Ausgangsposition ungespannt.



nicht konservatives System

→ Arbeitssatz

$$\underbrace{\cancel{T_1}}_{=0} + W_{12} = T_2$$

$$W_{12} = M \cdot \Theta - \frac{1}{2} c s^2$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \omega^2$$

Trägheitsradius → MTM

$$J_S = r_T^2 \cdot m$$

Kreisbewegung: $v_S = \omega \cdot R$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	1/3

$$M\cdot\Theta - \frac{1}{2}cs^2 = \frac{1}{2}m v_S^2 + \frac{1}{2}J_S\,\omega^2$$

$$M\Theta - \frac{1}{2}cs^2 = \frac{1}{2}m(\omega R)^2 + \frac{1}{2}(r_T^2\cdot m)\cdot\omega^2 \quad \Big|\cdot 2$$

$$2M\Theta - cs^2 = \omega^2\left[mR^2 + r_T^2 m\right]$$

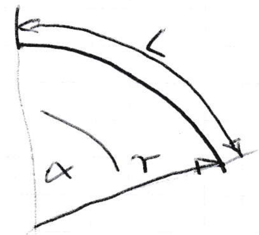
$$\omega^2 = \frac{2M\Theta - cs^2}{m\left[R^2 + r_T^2\right]}$$

↯ Θ und s unbekannt

Abrollweg von **B**

allgemein: $L = r\cdot\alpha$

speziell: $d = R\cdot\Theta$



Bewegung von A um B als Momentanpol

$$\vec{v}_A = \underbrace{\cancel{\vec{v}_B}}_{=0} + \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$$

$$\vec{v}_A = \vec{\omega}\times\vec{r}_{AB}$$

$\frac{d}{dt}$

$$\vec{s} = \vec{\Theta}\times\vec{r}_{AB} + \vec{\omega}\times\underbrace{\cancel{\dot{\vec{r}}_{AB}}}_{=0}$$

$$\vec{s} = -\Theta\vec{e}_z\times 2R\vec{e}_y$$

$$\vec{s} = -2R\Theta(-\vec{e}_x) = 2R\Theta\,\vec{e}_x$$

$$s = 2R\Theta \qquad \Big|\ \Theta = \frac{d}{R}$$

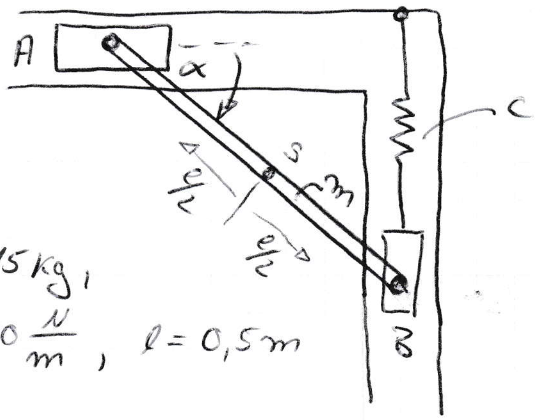
$$s = 2R\frac{d}{R} = 2d$$

$$w^2 = \frac{2M\frac{d}{R} - c\,(2d)^2}{m\left[R^2 + r_T^2\right]}$$

$$w = \sqrt{\dots} = 3{,}35\ \frac{rad}{s}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	3/3

Aufgabe 7.3 - Eckenschubverband



$m = 15\,kg$, $c = 800\,\frac{N}{m}$, $l = 0{,}5\,m$

Der Stab AB der Masse m wird an den Enden jeweils horizontal und vertikal reibungsfrei geführt. Die Feder besitzt die Federkonstante c und ist bei $\alpha = 0°$ ungedehnt.

Die Masse der Gleitstücke ist vernachlässigbar.

Wie groß ist die Winkelgeschwindigkeit des Stabes bei $\alpha = 0°$ wenn das System aus der Ruhe bei $\alpha = 30°$ freigegeben wird?

Konservatives System $\rightarrow$ EES (Bewegung von B nach oben)

$$\underbrace{\cancel{T_1}}_{=0} + V_1 = T_2 + \underbrace{\cancel{V_2}}_{=0}$$

$$V_1 = -mgh_s + \frac{1}{2} c\, h_2^2$$

$$h_s = \sin(30) \cdot \frac{l}{2} \quad ; \quad h_2 = \sin(30) \cdot l$$

$$T_2 = \frac{1}{2} m v_s^2 + \frac{1}{2} J_s\, \omega^2$$

$$v_s = \omega \cdot R = \omega \cdot \frac{l}{2} \quad ; \quad J_s = \frac{1}{12} m l^2$$

$$-mg \sin(30) \frac{l}{2} + \frac{1}{2} c \sin(30)^2 \cdot l^2 = \frac{1}{2} m\, \omega^2 \frac{l^2}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{12} m l^2 \omega^2$$

$$-mg \sin(30) \frac{l}{2} + \frac{1}{2} c \sin(30)^2 l^2 = \frac{1}{8} m l^2 \omega^2 + \frac{1}{24} m l^2 \omega^2$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	1/2

$$-mg\frac{1}{2}\cdot\frac{l}{2} + \frac{1}{2}\cdot c\cdot\frac{1}{4}l^2 = \omega^2 ml^2\left[\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\right]$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{1}{8}cl^2 - \frac{1}{4}mgl}{ml^2\cdot\frac{1}{6}}$$

$$\omega = \sqrt{\ldots} = 3{,}25\ \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

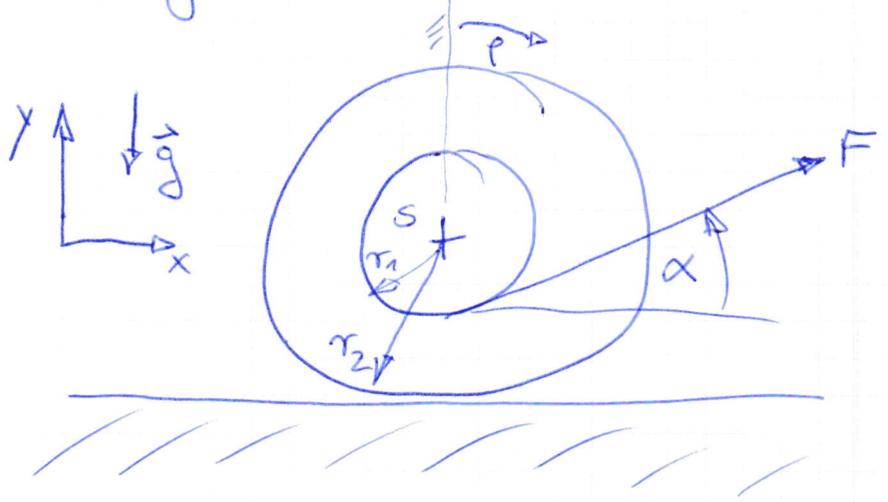
	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	2/2

Aufgabe 7.4 – Garnrolle

Eine Garnrolle mit der Masse m und dem Trägheitsmoment J_s ist unter einen Schrank gerollt. Der abgewickelte Faden liegt vor dem Schrank. Sie wollen versuchen die Garnrolle durch ziehen am Faden wieder vor den Schrank zu bekommen. Die Garnrolle soll zu jedem Zeitpunkt rollen ohne zu gleiten.

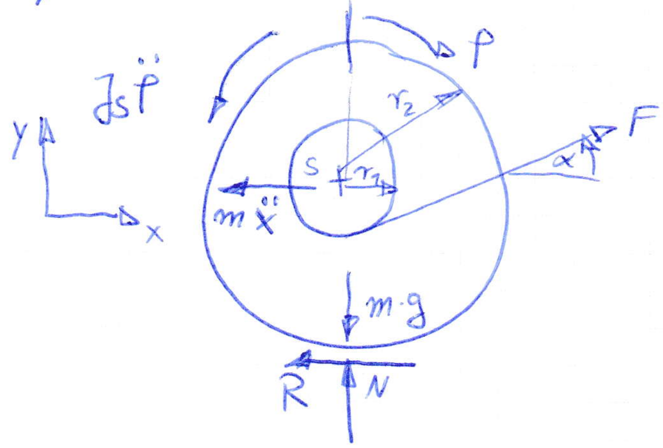
a) Wie lautet die allgemeine Schwerpunktsbeschleunigung $\ddot{x}(t)$ der Garnrolle

b) Unter welcher Bedingung für den Zugwinkel α bewegt sich die Garnrolle nach rechts bzw. nach Links?



Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
Name:	Revision:	Kap.:	1/3

a) Freischnitt nach d'Alembert



(I) $0 = F\cos(\alpha) - m\ddot{x} - R$

(II) $0 = N - mg + F\sin(\alpha)$

(III) $0 = -r_1 F + R r_2 - J_S\ddot{\varphi}$

Rollbedingung Kreisbewegung: $v = \omega \cdot r$

$$\rightarrow \dot{x} = \dot{\varphi} r_2 \quad \Big) \frac{d}{dt}$$

$$\ddot{x} = \ddot{\varphi} r_2 \quad \rightarrow \quad \ddot{\varphi} = \frac{\ddot{x}}{r_2}$$

aus (I) folgt: $R = F\cos(\alpha) - m\ddot{x}$

aus (III) folgt: $R = F\frac{r_1}{r_2} + \frac{J_S}{r_2}\ddot{\varphi}$

$$F\cos(\alpha) - m\ddot{x} = F\frac{r_1}{r_2} + \frac{J_S}{r_2}\ddot{\varphi}$$

$$F\cos(\alpha) - m\ddot{x} = F\frac{r_1}{r_2} + \frac{J_S}{r_2^2}\ddot{x} \quad \Big| -F\frac{r_1}{r_2} \quad \Big| + m\ddot{x}$$

$$\ddot{x}\left[\frac{J_S}{r_2^2} + m\right] = F\left[\cos(\alpha) - \frac{r_1}{r_2}\right]$$

$$\ddot{x} = \ddot{x}_{(t)} = F\,\frac{\cos(\alpha) - \frac{r_1}{r_2}}{\frac{J_S}{r_2^2} + m}$$

b) Bewegung nach rechts

$\rightarrow \dot{x} > 0 \,,\; x > 0$

$\dot{x}_{(t)}$ durch Integration

$$\ddot{x}_{(t)} = F r_2^2 \frac{\cos(\alpha) - \frac{r_1}{r_2}}{J_S + m r_2^2}$$

$$\dot{x}_{(t)} = \int \ddot{x}_{(t)} \, dt$$

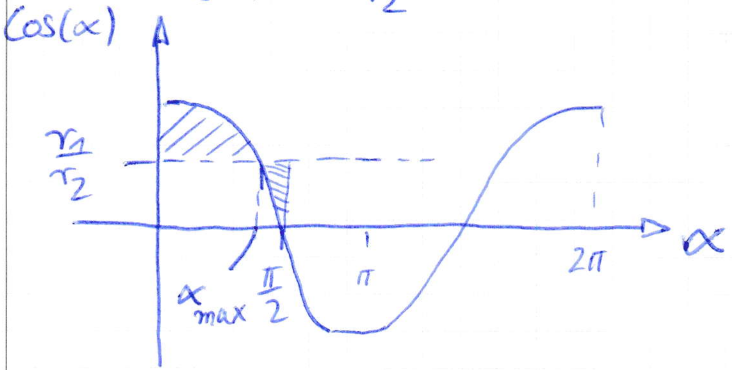
$$\dot{x}_{(t)} = F r_2^2 \frac{\cos(\alpha) - \frac{r_1}{r_2}}{J_S + m r_2^2} t + \dot{x}_0$$

$\dot{x}_0$ über AB $\rightarrow \dot{x}\big|_{t=0} \overset{!}{=} 0 \rightarrow \dot{x}_0 = 0$

$$\Rightarrow \dot{x}_{(t)} = F r_2^2 \frac{\cos(\alpha) - \frac{r_1}{r_2}}{J_S + m r_2^2} t \overset{!}{>} 0$$

Betrachtung des Zählers: $\cos(\alpha) - \frac{r_1}{r_2} \overset{!}{>} 0$

$\cos(\alpha) > \frac{r_1}{r_2}$



weil $r_1 < r_2$ gilt

$\frac{r_1}{r_2} < 1$

$0 \leq \alpha \leq 90°$

$\Rightarrow$ für $0 \leq \alpha_{max}$: Bewegung nach rechts

für $\alpha_{max} < \alpha < 90°$: Bewegung nach links

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	3/3