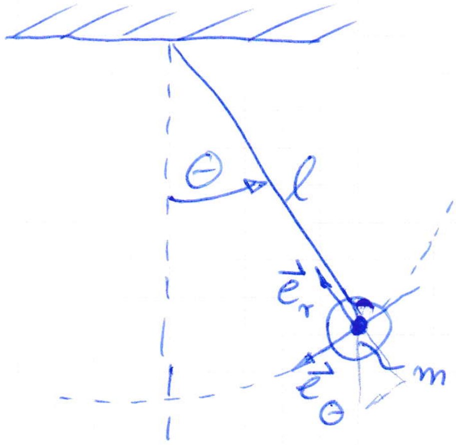
Aufgabe 8.1 – Pendel

Am Ende eines masselosen Fadens der Länge l befindet sich eine Masse M. Der Faden ist reibungsfrei im Punkt A gelagert. Die Kugel wird um den Winkel Θ ausgelenkt und aus der Ruhe freigegeben.

a) Welche Bewegung stellt sich ein?

b) Wie groß ist die Eigenkreisfrequenz ω_0 und die Periodendauer T?



a) freie ungedämpfte Schwingung

b) Auswertung in $\vec{e}_\Theta$-Richtung

$$m \cdot a_\Theta = -mg\sin(\Theta)$$

a_Θ aus Kreisbewegung:

$$a_\Theta = r\ddot{\Theta} + \cancel{2\dot{r}\dot{\Theta}}$$

$r = \text{Konst} \rightarrow \dot{r} = 0$

$$\Rightarrow m r \ddot{\Theta} = -mg\sin(\Theta)$$

Linearisierung der Bewegungsgleichung:

für kleine Θ gilt $\sin(\Theta) \approx \Theta$

$$\Rightarrow \cancel{m} r \ddot{\Theta} = -\cancel{m} g \Theta$$

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{l}\Theta = 0 \quad \rightarrow \text{Bewegungsgleichung}$$

$$\ddot{\Theta} + \frac{g}{\ell}\Theta = 0$$

Vergleich mit charakteristischer Gleichung für freie ungedämpfte Schwingung:

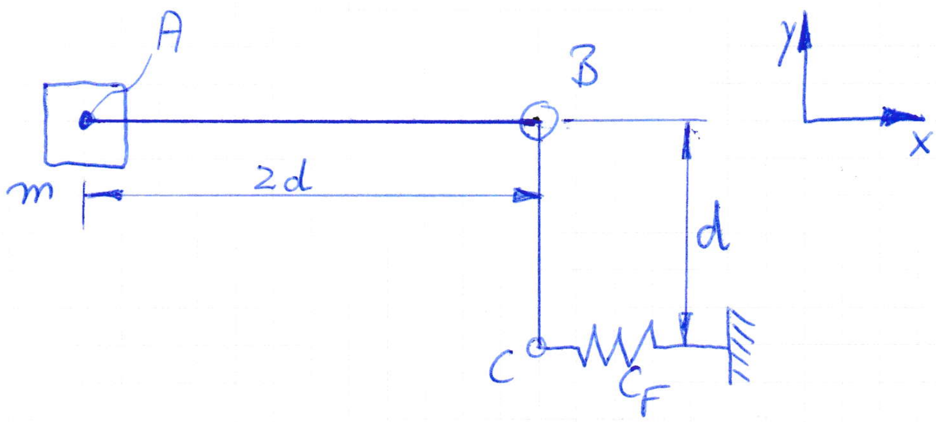
$$\left.\begin{aligned} \ddot{\Theta} + \frac{g}{\ell}\Theta &= 0 \\ \ddot{x} + \frac{c}{m}x &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{(Eigenkreisfrequenz)}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

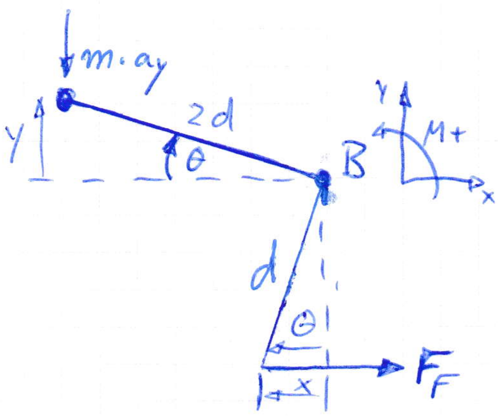
	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	2/2

Aufgabe 8.2 – Winkelstab

Ein L-förmiger Winkelstab bewegt sich in der horizontalen Ebene und ist im Punkt B reibungsfrei drehbar gelagert. Im Punkt A ist die Masse m befestigt, der Punkt C ist über eine Feder mit der Federkonstanten c_F an einer starren Wand befestigt. In der rechtwinkligen Lage ist die Feder spannungslos.
($m = 5\,Kg$, $d = 100\,mm$, $c_F = 500\,\frac{N}{m}$)



Wie groß ist die Schwingungsdauer des Systems ?



Geometrie :

$\sin(\theta) = \frac{x}{d}$

$\sin(\theta) = \frac{y}{2d}$

für kleine θ gilt: $\sin(\theta) \approx \theta$

$\rightarrow \theta = \frac{x}{d}$; $\theta = \frac{y}{2d}$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	1/2

Bewegungsgleichung → Momentenbilanz um B

$$\sum M_{(B)} \overset{!}{=} 0$$

$$0 = + m a_y 2d + c_F \cdot x \cdot d$$

$$0 = 2md\,\ddot{y} + c_F\, x\, d$$

$$y = \Theta \cdot 2d \rightarrow \dot{y} = \dot{\Theta} \cdot 2d \rightarrow \ddot{y} = \ddot{\Theta} \cdot 2d$$

$$x = \Theta \cdot d$$

$$\Rightarrow 0 = 2md\,(\ddot{\Theta} \cdot 2d) + c_F\, d\,(\Theta \cdot d)$$

$$0 = 4md^2\,\ddot{\Theta} + c_F\, d^2\, \Theta \quad | : 4md^2$$

$$0 = \ddot{\Theta} + \underbrace{\frac{c_F}{4m}}_{\omega_0^2} \Theta \rightarrow \text{Schwingungsgleichung}$$

$$\omega_0^2 = \frac{c_F}{4m} \quad ; \quad T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{c_F}{4m}}} = 1{,}27\,\mathrm{s}$$

Aufgabe 8.3 – Gedämpftes Stabpendel

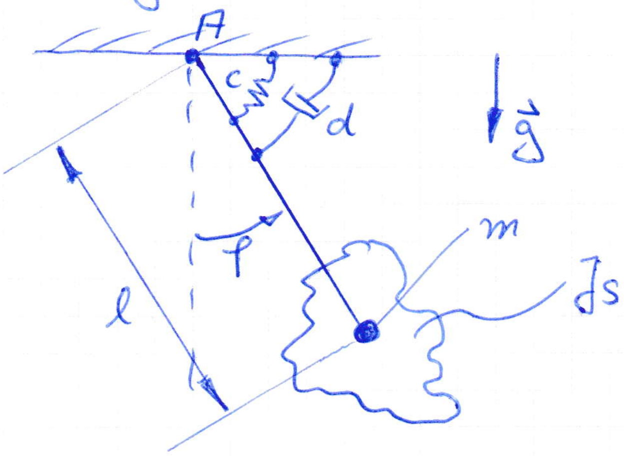
Ein Körper der Masse m und dem Massenträgheitsmoment J_S ist über eine masselose Stange im Drehpunkt A befestigt. An der Stange ist eine Feder (Federkonstante c) und ein Dämpfer (Dämpferkonstante d) befestigt. Beide Elemente sind proportional zu φ bzw. $\dot{\varphi}$. Das Pendel führt eine ebene Bewegung im Schwerefeld der Erde aus.

1) Stellen Sie mit dem Prinzip von d'Alembert die linearisierte Bewegungsgleichung auf.

2) Geben Sie die ungedämpfte Eigenfrequenz ω_0 und die gedämpfte Eigenfrequenz ω_d an.

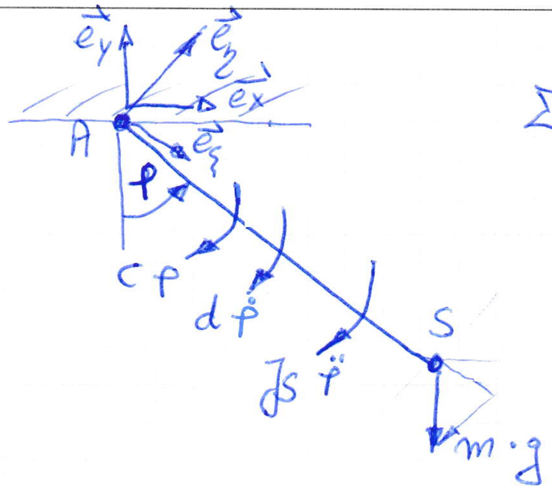
3) Skizzieren Sie den Verlauf der Amplitude der Schwingung wenn gilt: $\varphi_{(t=0)} = \varphi_0$

4) Geben Sie die Lösungsfunktion der Bewegungsgleichung (homogen und partikulär) an, wenn gilt: $\varphi_{(t=0)} = \varphi_0$; $\dot{\varphi}_{(t=0)} = 0$



	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	1/3

1)



$$\sum M_{(A)} = 0$$

$$0 = -J_S\ddot{\varphi} - d\dot{\varphi} - c\varphi - mgl\sin(\varphi)$$

Linearisierung: $\sin(\varphi) \approx \varphi$

$$0 = -J_S\ddot{\varphi} - d\dot{\varphi} - c\varphi - mgl\varphi$$

$$0 = J_S\ddot{\varphi} + d\dot{\varphi} + (c + mgl)\varphi \quad \rightarrow \text{Bewegungsgleichung}$$

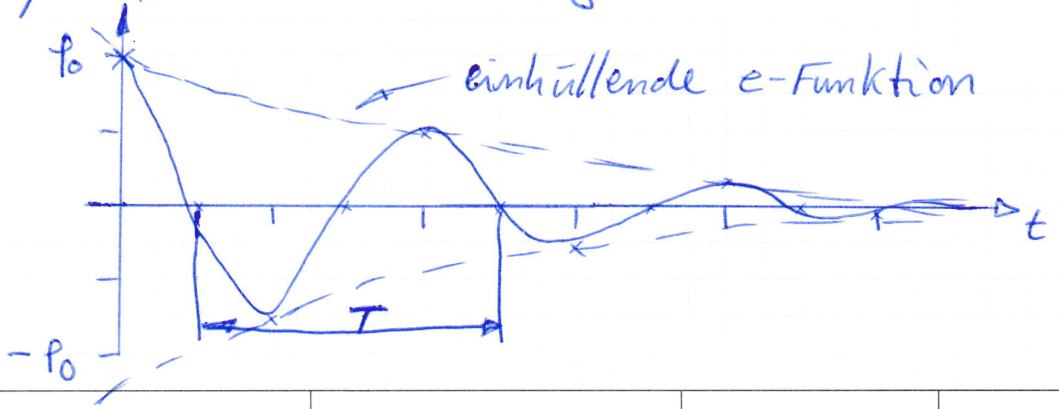
2) $$0 = \ddot{\varphi} + \underbrace{\frac{d}{J_S}}_{2D\omega_0}\dot{\varphi} + \underbrace{\frac{c+mgl}{J_S}}_{\omega_0^2}\varphi$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c+mgl}{J_S}} \quad ; \quad \omega_d = \omega_0\sqrt{1-D^2}$$

$$\frac{d}{J_S} = 2D\omega_0 \quad \rightarrow \quad D = \frac{d}{2J_S\omega_0}$$

$$\omega_d = \sqrt{\frac{c+mgl}{J_S}} \cdot \sqrt{1 - \frac{d^2}{4J_S^2 \cdot \frac{c+mgl}{J_S}}}$$

3) Amplitude = Auslenkung



	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	2/3

4) Keine Anregung $\rightarrow$ keine partikuläre Lösung

$\Rightarrow \varphi_p(t) = 0$

Ansatz für $\varphi_{h(t)}$:

$$\varphi_{h(t)} = e^{-D\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

$$\dot{\varphi}_{h(t)} = -D\omega_0 e^{-D\omega_0 t}[\ldots] + e^{-D\omega_0 t}\left[-A\omega_d \sin(\omega_d t) + B\omega_d\cos(\omega_d t)\right]$$

$$\varphi_{(t)} = \varphi_{h(t)} + \varphi_{p(t)} = \varphi_{h(t)}$$

AB: $\varphi_{(t=0)} \overset{!}{=} \varphi_0 \quad ; \quad \dot{\varphi}_{(t=0)} \overset{!}{=} 0$

$$(I)\quad \varphi_0 \overset{!}{=} \underbrace{e^{-D\omega_0\cdot 0}}_{=1}\left[A\underbrace{\cos(\omega_d\cdot 0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(\omega_d\cdot 0)}_{=0}\right]$$

$\rightarrow A = \varphi_0$

$$(II)\quad 0 = -D\omega_0\underbrace{e^{-D\omega_0\cdot 0}}_{=1}[A + 0] + \underbrace{e^{-D\omega_0\cdot 0}}_{=1}\left[\underbrace{\cancel{-A\omega_d\cdot 0}}_{=0} + B\omega_d\cdot 1\right]$$

$$0 = -D\omega_0\cdot A + B\omega_d \qquad | A = \varphi_0$$

$$B = \frac{\varphi_0 D\omega_0}{\omega_d}$$

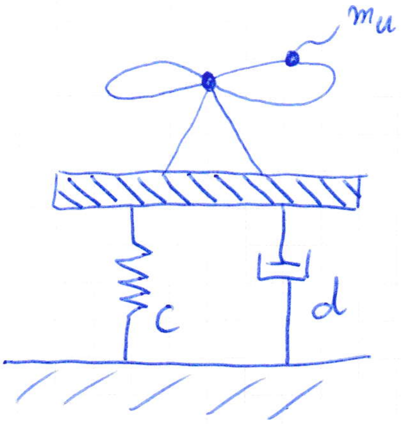
$$\Rightarrow \varphi_{(t)} = e^{-D\omega_0 t}\left[\varphi_0\cos(\omega_d t) + \frac{\varphi_0 D\omega_0}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right]$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	3/3

Aufgabe 8.4 – Unwuchtmessung

Für die Messung der Unwucht wird ein Propeller der Masse M auf einem Schwingungstisch befestigt. Die Unwucht ist in erster Näherung eine Masse m_u im Abstand R von der Drehachse. Der Propeller führt eine konstante Drehbewegung mit der Winkelgeschwindigkeit Ω aus.

Wie groß ist die maximale Amplitude der Schwingung?



$M = 50\,\text{kg}$, $m_u = 1\,\text{kg}$

$c = 800\,\frac{N}{m}$, $R = 100\,\text{mm}$

$\Omega = 10\,\frac{1}{s}$, $D = 0{,}1$

Partikuläre Lösung: $y_{P(t)} = \hat{y}\sin(\Omega t - \varepsilon) = V \cdot y_0 \sin(\Omega t - \varepsilon)$

$$\hat{y} = V \cdot y_0$$

y_0 → statische Amplitude

V → Vergrößerungsfunktion

Massenkrafterregung: $V = \dfrac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$

$\eta = \dfrac{\Omega}{\omega_0}$ $\qquad$ ω_0 aus Bewegungsgleichung charakteristische Bewegungsgleichung:

$$(M+m_u)\ddot{y} + d\dot{y} + cy = \hat{F}\sin(\Omega t)$$

$$\hat{F} = m_u R \Omega^2$$

$$(M+m_u)\ddot{y} + d\dot{y} + cy = m_u R \Omega^2 \sin(\Omega t) \quad | : (M+m_u)$$

$$\ddot{y} + \underbrace{\frac{d}{M+m_u}}_{2D\omega_0}\dot{y} + \underbrace{\frac{c}{M+m_u}}_{\omega_0^2} y = \underbrace{\frac{m_u}{M+m_u}R}_{y_0}\underbrace{\Omega^2}_{E\omega_0^2}\sin(\Omega t)$$

Vergleich mit allgemeiner Gleichung für erzwungene Schwingung

$$\ddot{y} + 2D\omega_0\dot{y} + \omega_0^2 y = x_0 \; E\omega_0^2 \sin(\Omega t)$$

$$\rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M+m_u}} = 3{,}96 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

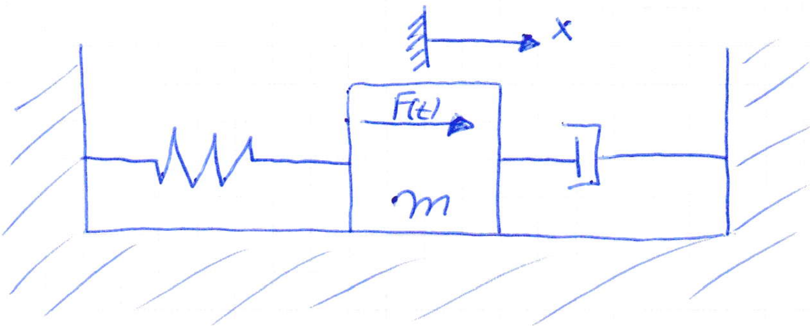
$$\eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = \frac{10}{3{,}96} = 2{,}53$$

$$V = \frac{\eta^2}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}} = 1{,}18$$

$$\hat{y} = V \cdot y_0 = V \cdot \frac{m_u}{M+m_u} R = 2{,}31 \text{ mm}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	2/2

Aufgabe 8.5 – Feder-Masse-Dämpfer-System



Ein Körper der Masse $m = 10$ Kg ist mit einer Feder ($c = 60 \frac{N}{m}$) und einem Dämpfer ($d = 10 \frac{Ns}{m}$) an gegenüberliegenden Wänden fixiert. Der Körper bewegt sich reibungsfrei entlang der x-Achse.
Die äußere Kraft $F_{(t)}$ greift im Schwerpunkt an, und besitzt nur eine x-Komponente.

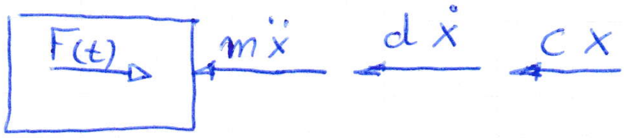
a) Wie lautet die allgemeine Bewegungsgleichung des Systems?

b) Für eine freie Schwingung, beginnend mit der Auslenkung x_1 aus der Ruhe, bestimme man die homogene Lösung $x_h(t)$.
Wie lange dauert es, bis die Amplitude **nur** noch $\frac{1}{10}$ der Startauslenkung ist?

c) Das System wird mit $F(t) = F_0 \sin(\Omega t)$ angeregt. Welche Art der Erregung liegt vor? Wie groß muss das Lehrsche Dämpfungsmaß D mindestens sein, damit im Resonanzfall die Verstärkung maximal den Faktor 10 erreicht? Wie groß ist die geschätzte maximale Verstärkung außerhalb der Resonanz? ($\Omega = 2{,}125 \frac{rad}{s}$)

Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
Name:	Revision:	Kap.:	1/4

a)



$$0 = F_{(t)} - m\ddot{x} - d\dot{x} - cx$$

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = F_{(t)} \longrightarrow \text{Bewegungsgleichung}$$

b) freie Schwingung → <u>Keine</u> Erregung ⇒ $F_{(t)} = 0$

$$0 = m\ddot{x} + d\dot{x} + cx$$

$$0 = \ddot{x} + \frac{d}{m}\dot{x} + \frac{c}{m}x$$

$$0 = \ddot{x} + 2Dw_0\dot{x} + w_0^2 x$$

Allgemeine Lösung für kleine Dämpfungen:

$$x_{h(t)} = e^{-Dw_0 t}\left[A\cos(w_d t) + B\sin(w_d t)\right]$$

$$\dot{x}_{h(t)} = -Dw_0 e^{-Dw_0 t}\left[\ldots\right] + e^{-Dw_0 t}\left[-A w_d \sin(w_d t) + B w_d \cos(w_d t)\right]$$

Anfangsbedingungen: $x_{(t=0)} = x_1$; $\dot{x}_{(t=0)} = 0$

(1) $x_1 = \underbrace{e^0}_{=1}\left[A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0}\right] = A$

(2) $0 = -Dw_0\underbrace{e^0}_{=1}\left[A + 0\right] + \underbrace{e^0}_{=1}\left[-A w_d \underbrace{\sin(0)}_{=0} + B w_d \underbrace{\cos(0)}_{=1}\right]$

$$0 = -Dw_0 A + \left[0 + B w_d\right] \qquad | A = x_1$$

$$Dw_0 x_1 = B w_d \qquad | w_d = w_0\sqrt{1-D^2}$$

$$B = \frac{Dw_0 x_1}{w_d} = \frac{D x_1}{\sqrt{1-D^2}}$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	2/4

$$\Rightarrow x_{h(t)} = e^{-D\omega_0 t}\left[A\cos(\omega_d t) + B\sin(\omega_d t)\right]$$

$$x_{h(t)} = e^{-D\omega_0 t}\left[x_1 \cos(\omega_d t) + \frac{D x_1}{\sqrt{1-D^2}} \sin(\omega_d t)\right]$$

Für $x_h \leq \frac{x_1}{10}$ $\rightarrow$ Betrachtung der Hüllkurve ausreichend

$$\frac{1}{10} = e^{-D\omega_0 t}$$

$$\ln\left(\frac{1}{10}\right) = -D\omega_0 t$$

$$t = -\frac{\ln\left(\frac{1}{10}\right)}{D\,\omega_0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{m}} = 2{,}45 \, \frac{rad}{s}$$

$$\frac{d}{m} = 2D\omega_0 \rightarrow D = \frac{d}{2\omega_0 m} = 0{,}2$$

$$\Rightarrow t = 4{,}7 \text{ s}$$

3) Erzwungene Schwingung

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + cx = F_0 \sin(\Omega t)$$

$$\hat{F} = F_0 = \text{konst} \rightarrow \text{Kraftanregung}$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1-\eta^2)^2 + (2D\eta)^2}}$$

Resonanz $\rightarrow \eta = 1$ $\Rightarrow V = \frac{1}{2D}$

$$V_{max} = \frac{1}{2D_{min}} \rightarrow D_{min} = \frac{1}{2V_{max}} = 0{,}05$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	3/4

Abschätzung außerhalb Resonanz: $D = 0$

$$V_{max} = \frac{1}{|1 - \eta^2|} \qquad \eta = \frac{\Omega}{\omega_0} = 0,5$$

$$V_{max} = 1,3$$

$$\left[V_R = \frac{1}{2D} = 2,5 \quad ; \quad V_{max}^* = \frac{1}{2D\sqrt{1-D^2}} = 2,55 \right]$$

	Projekt:	Datum:	Pos.:	Seite:
	Name:	Revision:	Kap.:	4/4