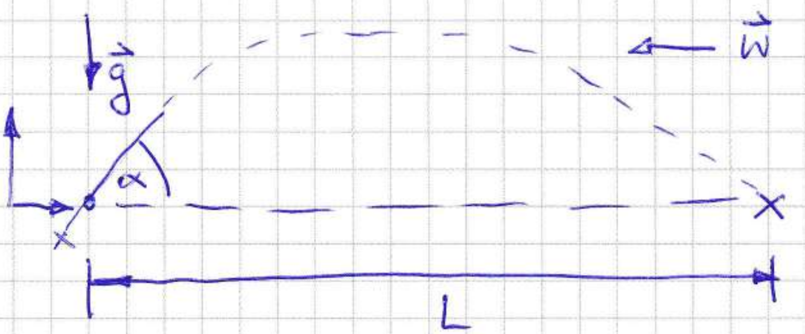
Aufgabe 2.1 – Robin Hood



$$\vec{g} = -g\,\vec{e_y} = -9{,}81\,\frac{m}{s^2}\,\vec{e_y}$$

$$\vec{w} = -1\,\frac{m}{s^2}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{w} = w\,\vec{e_x}$$

a) Wie lautet $\vec{a}_{(t)}$

$$a_{(t)} = w\,\vec{e_x} - g\,\vec{e_y}$$

b) $\vec{v}_{(t)}$ und $\vec{x}_{(t)}$

$$\vec{v}_{(t)} = \int_{t_0}^{t} \vec{a}_{(t)}\,dt$$

$$\vec{v}_{(t)} = \int_{t_0}^{t} w\,\vec{e_x} - g\,\vec{e_y}\,dt$$

$$\vec{v}_{(t)} = (w\,t + c_1)\,\vec{e_x} + (c_2 - gt)\,\vec{e_y}$$

$$\vec{x}_{(t)} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}_{(t)}\,dt = \left(\tfrac{1}{2}wt^2 + c_1 t + c_3\right)\vec{e_x}$$

$$\left(-\tfrac{1}{2}gt^2 + c_2 t + c_4\right)\vec{e_y}$$

Anfangsbedingungen:

$$\vec{v}_{(t=0)} = \vec{v}_0 = v_{0x}\,\vec{e}_x + v_{0y}\,\vec{e}_y$$

$$\rightarrow c_1 = v_{0x} \;;\; c_2 = v_{0y}$$

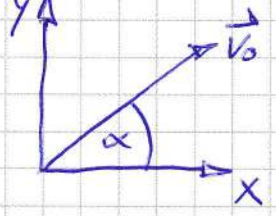
$$\vec{x}_{(t=0)} = \vec{0}$$

$$\rightarrow c_3 = 0 \;;\; c_4 = 0$$

$$\vec{v}_{(t)} = (wt + v_{0x})\,\vec{e}_x + (-gt + v_{0y})\,\vec{e}_y$$

$$\vec{x}_{(t)} = \left(\tfrac{1}{2} w t^2 + v_{0x} t\right)\vec{e}_x + \left(-\tfrac{1}{2} g t^2 + v_{0y} t\right)\vec{e}_y$$

c) Wie groß ist α für $v_0 = 200\ \frac{km}{h}$



$$v_{0x} = \cos(\alpha)\, v_0$$

$$v_{0y} = \sin(\alpha)\, v_0$$

$$\vec{x}_{(t=t_2)} \overset{!}{=} L\ \vec{e}_x$$

$$(I)\ -\tfrac{1}{2} g t_2^2 + \sin(\alpha)\, v_0 t \overset{!}{=} 0$$

$$(II)\ \tfrac{1}{2} w t_2^2 + \cos(\alpha)\, v_0 t \overset{!}{=} L$$

$$(I)\quad -\frac{1}{2} g t_2^2 + \sin(\alpha)\, v_0 t \overset{!}{=} 0 \quad \Big| \cdot \left(-\frac{2}{g}\right)$$

$$t_2^2 - \frac{2\sin(\alpha)\, v_0}{g} t = 0$$

$$t_{2\,a/b} = + \frac{\sin(\alpha)\, v_0}{g} \pm \sqrt{\frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{g^2}}$$

$$t_{2a} = 2\,\frac{\sin(\alpha)\, v_0}{g} \;;\; t_{2b} = 0$$

$$(II)\quad \frac{1}{2} w t_2^2 + \cos(\alpha) v_0 t_2 \overset{!}{=} L$$

$$L = \cancel{\frac{1}{2}} w \cancel{4}^{2} \frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{g^2} + \cos(\alpha)\sin(\alpha)\frac{2 v_0^2}{g}$$

$$L = 2w\frac{\sin(\alpha)^2 v_0^2}{g^2} + \cancel{2}\frac{v_0^2}{g}\cdot \sin(2\alpha)\cancel{\frac{1}{2}}$$

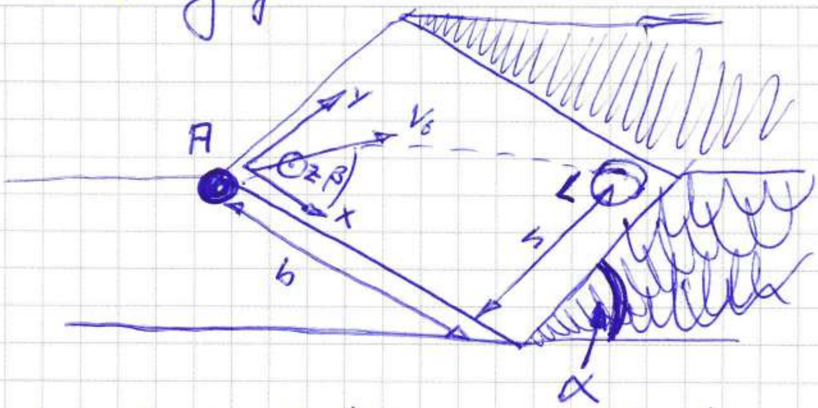
$$L = \frac{2 w v_0^2}{g^2}\sin(\alpha)^2 + \frac{v_0^2}{g}\sin(2\alpha)$$

$\hookrightarrow$ Numerische Lösung erforderlich

für $L = 100\,m$, $w = -1\,\frac{m}{s^2}$, $g = 9{,}81\,\frac{m}{s^2}$, $v_0 = 200\,\frac{km}{h}$
folgt:

$$\alpha_1 = 9{,}43^\circ \quad , \quad \alpha_2 = 74{,}75^\circ$$

Aufgabe 2.2 – Minigolf

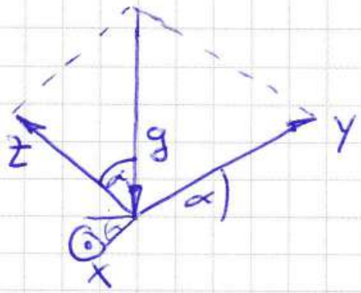


Beim Minigolf soll der Ball von der Position A in das Loch L befördert werden. Der Ball rollt dabei auf einer um den Winkel α zur horizontalen geneigten Ebene reibungsfrei.

a) Man bestimme den Beschleunigungsvektor $\vec{a}_{(t)}$, den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{(t)}$ und den Lagevektor $\vec{r}_{(t)}$ in kartesischen Koordinaten.

b) Mit welcher Geschwindigkeit v_0 und unter welchen Winkel β muss der Ball gespielt werden, wenn er gerade so und [parallel zur x-Achse] in das Loch treffen soll?

a)



$g_y = -\sin(\alpha)\, g$

$g_z = -\cos(\alpha)\, g$

$$\vec{a}(t) = 0\,\vec{e_x} - \sin(\alpha) g\,\vec{e_y} - \cos(\alpha) g\,\vec{e_z}$$

$a_z = -\cos(\alpha) g$ vernachlässigbar, weil $\perp$ zur Bewegung

$$\rightarrow \vec{a}(t) = -\sin(\alpha) g\,\vec{e_y}$$

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)\, dt = \int_{t_0}^{t} -\sin(\alpha) g\,\vec{e_y} + 0\,\vec{e_x}\, dx$$

$$\vec{v}(t) = (-\sin(\alpha) g\, t + c_1)\,\vec{e_y} + c_2\,\vec{e_x}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)\, dt = \left(-\frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + c_1 t + c_3\right)\vec{e_y} + (c_2 t + c_4)\vec{e_x}$$

Anfangsbedingung:

$$\vec{r}(t=0) \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow c_3 = 0,\ c_4 = 0$$

$$\vec{v}(t=0) \overset{!}{=} v_{0x}\,\vec{e_x} + v_{0y}\,\vec{e_y} \quad \rightarrow c_1 = v_{0y},\ c_2 = v_{0x}$$

$$\vec{v}(t) = (-\sin(\alpha) g\, t + v_{0y})\,\vec{e_y} + v_{0x}\,\vec{e_x}$$

$$\vec{r}(t) = \left(-\frac{1}{2} g \sin(\alpha) t^2 + v_{0y} t\right)\vec{e_y} + v_{0x} t\,\vec{e_x}$$

b) $\vec{r}(t=t_2) = b\,\vec{e_x} + h\,\vec{e_y}$

$\vec{v}(t=t_2) \stackrel{!}{=} 0$

(I) $b = v_{0x}\,t_2$

(II) $h = -\frac{1}{2} g \sin(\alpha)\, t_2^2 + v_{0y}\, t_2$

(III) $0 = -\sin(\alpha)\, g\, t_2 + v_{0y}$ $\qquad (v_y \stackrel{!}{=} 0)$

$\sin(\alpha)\, g\, t_2 = v_{0y}$

$\rightarrow t_2 = \frac{v_{0y}}{g\sin(\alpha)}$

$\rightarrow$ (II) $h = -\frac{1}{2} \cancel{g \sin(\alpha)} \frac{v_{0y}^2}{g^2 \sin(\alpha)^2} + v_{0y} \frac{v_{0y}}{g\sin(\alpha)}$

$h = -\frac{1}{2} \frac{v_{0y}^2}{g\sin(\alpha)} + \frac{v_{0y}^2}{g\sin(\alpha)}$

$\rightarrow v_{0y} = \sqrt{2hg\sin(\alpha)}$

$b = v_{0x} t_2 = v_{0x} \frac{1}{g\sin(\alpha)} \sqrt{2hg\sin(\alpha)} = v_{0x} \sqrt{\frac{2h}{g\sin(\alpha)}}$

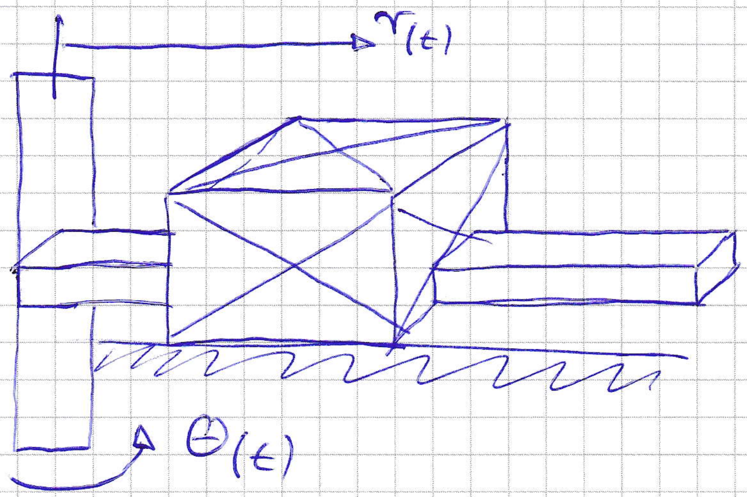
$v_{0x} = b\sqrt{\frac{g\sin(\alpha)}{2h}}$

$\vec{v_0} = b\sqrt{\frac{g\sin(\alpha)}{2h}}\,\vec{e_x} + \sqrt{2hg\sin(\alpha)}\,\vec{e_y}$

$t_2 = \frac{v_{0y}}{g\sin(\alpha)} = \frac{\sqrt{2hg\sin(\alpha)}}{g\sin(\alpha)} = \sqrt{\frac{2h}{g\sin(\alpha)}}$

Aufgabe 2.3 - Kiste auf drehender Führung

Eine Kiste kann sich reibungsfrei in radialer Richtung entlang einer drehenden Führung bewegen. Die Drehung der Führung in einer horizontalen Ebene wird durch $\Theta_{(t)}$ beschrieben, die Bewegung nach außen durch $r_{(t)}$. Bestimmen Sie die Geschwindigkeit und die Beschleunigung zum Zeitpunkt $t_1 = 2s$.



$$\Theta_{(t)} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^3$$

$$r_{(t)} = k \cdot t^2$$

$$k = 10 \, \frac{mm}{s^2}$$

$\vec{r}_{(t)} = r\,\vec{e_r} + \underbrace{\cancel{z\,\vec{e_z}}}_{=0}$ ebene Bewegung

$\dot{\vec{r}}_{(t)} = \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\varphi}\,\vec{e_\varphi} = \vec{v}_{(t)}$

$\ddot{\vec{r}}_{(t)} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\,\vec{e_r} + (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\,\vec{e_\varphi} = \vec{a}_{(t)}$

Aufgabe: $\varphi \rightarrow \Theta$

$r(t) = k t^2 \;;\quad r_{(t_1)} = 40\ mm$

$\dot{r}(t) = 2kt \;;\quad \dot{r}_{(t_1)} = 40\ \frac{mm}{s}$

$\ddot{r} = 2k \;;\quad \ddot{r}_{(t)} = 20\ \frac{mm}{s^2}$

$\frac{\alpha}{360} = \frac{b}{2\pi}$

$\Theta_{(t)} = \left(\frac{t}{t_1}\right)^3 \;;\quad \Theta_{(t_1)} = 1\ rad = 57{,}3°$

$\dot{\Theta}_{(t)} = 3\left(\frac{t}{t_1}\right)^2 \frac{1}{t_1} \;;\quad \dot{\Theta}_{(t_1)} = \frac{3}{2}\ \frac{rad}{s} = 1{,}5\ \frac{1}{s}$

$\ddot{\Theta}_{(t)} = 6\left(\frac{t}{t_1}\right) \frac{1}{t_1^2} \;;\quad \Theta_{(t_1)} = \frac{6}{4}\ \frac{3}{2}\ \frac{rad}{s^2} = 1{,}5\ \frac{1}{s^2}$

$\vec{V}_{(t)} = 40\ \frac{mm}{s}\,\vec{e_r} + 40\,mm \cdot 1{,}5\ \frac{1}{s}\ \vec{e_\Theta} = 40\ \frac{mm}{s}\,\vec{e_r} + 60\ \frac{mm}{s}\,\vec{e_\Theta}$

$|\vec{v}| = \sqrt{40^2 + 60^2}\ \frac{mm}{s} = 72{,}11\ \frac{mm}{s}$

$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{60}{40}\right) = 56{,}31°$ (Winkel zur Führung)

$$\vec{a}_{(t)} = \left(20 \frac{mm}{s^2} - 40\, mm \left(1{,}5 \frac{1}{s}\right)^2\right) \vec{e}_r$$

$$+ \left(40\, mm \cdot 1{,}5 \frac{1}{s^2} + 2 \cdot 40 \frac{mm}{s} \cdot 1{,}5 \frac{1}{s}\right) \vec{e}_\Theta$$

$$\vec{a}_{(t)} = -70 \frac{mm}{s^2} \vec{e}_r + 180 \frac{mm}{s^2} \vec{e}_\Theta$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{70^2 + 180^2} \frac{mm}{s^2} = 193{,}13 \frac{mm}{s^2}$$

$$\beta = \tan^{-1}\left(\frac{180}{-70}\right) = -68{,}75$$

$$\beta' = 180 + \beta = 111{,}25^\circ$$ (Winkel zur Führung)

Aufgabe 2.4 - Bremsschleife Dosenfabrik

In einer Dosenfabrik rutschen die abgefüllten Dosen über eine Rampe zum Verpacken. Am Ende der Rampe befindet sich eine kreisförmige Schleife zum Abbremsen der Dosen. Kurz vor der Schleife haben die Dosen die Geschwindigkeit v_0. In der Schleife werden sie durch eine zeitlich konstante tangentiale Verzögerung b_S bis zum Stillstand abgebremst.

Bestimmen Sie für die Bewegung einer Dose in Polarkoordinaten:

a) die Komponente a_φ des Beschleunigungsvektors in $\vec{e}_\varphi$-Richtung

b) durch Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Berechnungsformel $\vec{a}_\varphi = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$ und anschließender Integration die Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{(t)}$

c) den Geschwindigkeitsvektor $\vec{v}_{(t)}$ und den Beschleunigungsvektor $\vec{a}_{(t)}$

d) die Zeit T, nach der eine Dose zum stehen kommt

a) $\vec{a}_{(t)} = a_\varphi \vec{e_\varphi} + a_r \vec{e_r}$

$a_{(t)} = (r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})\vec{e_\varphi} + (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r}$

$\hookrightarrow a_\varphi \stackrel{!}{=} r\ddot{\varphi} + \underbrace{\cancel{2\dot{r}\dot{\varphi}}}_{=0,\ r = \text{Konst}}$

$a_\varphi = r\ddot{\varphi} \stackrel{!}{=} -b_s$ (konstante tangentiale Verzögerung)

$\rightarrow \vec{a_\varphi} = -b_s \vec{e_\varphi}$

b) $r\ddot{\varphi} \stackrel{!}{=} -b_s$

$\ddot{\varphi} = -\frac{b_s}{r} \quad | \int$

$\int \ddot{\varphi}_{(t)}\, dt = -\int \frac{b_s}{r}\, dt$

$\dot{\varphi}_{(t)} = -\frac{b_s}{r} t + c_1 \quad | \text{AB}: \dot{\varphi}_{(t=0)} \stackrel{!}{=} \vec{v}_{(t=0)}$

$\vec{v}_{(t)} = \underbrace{\cancel{\dot{r}\vec{e_r}}}_{=0,\ r = \text{Konst}} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$\vec{v}_{(t=0)} \stackrel{!}{=} v_0 \vec{e_\varphi} = r\dot{\varphi}_{(0)} \vec{e_\varphi}$

$\rightarrow \dot{\varphi}_{(0)} = \frac{v_0}{r}$ (vgl.: $v = \omega \cdot r$)

$\Rightarrow c_1 = \frac{v_0}{r}$

$\dot{\varphi}_{(t)} = -\frac{b_s}{r} t + \frac{v_0}{r}$

DHBW Duale Hochschule Baden-Württemberg

StuV Studierenden-Vertretung Karlsruhe

c) $\vec{v}_{(t)} = \underbrace{\cancel{\dot{r}\vec{e_r}}}_{=0,\ r=\text{konst.}} + r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$\vec{v}_{(t)} = r\dot{\varphi}\vec{e_\varphi} = (-b_S t + v_0)\vec{e_\varphi}$

$\vec{a}_{(t)} = (\underbrace{\cancel{\ddot{r}}}_{=0} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e_r} + (r\ddot{\varphi} + \underbrace{\cancel{2\dot{r}\dot{\varphi}}}_{=0})\vec{e_\varphi}$

$\vec{a}_{(t)} = -r\dot{\varphi}^2\vec{e_r} + r\ddot{\varphi}\vec{e_\varphi}$

$\dot{\varphi} = -\frac{b_S}{r}t + \frac{v_0}{r}$; $\dot{\varphi}^2 = \left(\frac{v_0}{r} - \frac{b_S}{r}t\right)^2$

$\ddot{\varphi} = -\frac{b_S}{r}$

$\vec{a}_{(t)} = -r\left(\frac{v_0}{r} - \frac{b_S}{r}t\right)^2\vec{e_r} - b_S\vec{e_\varphi} = -\frac{1}{r}(v_0 - b_S t)^2\vec{e_r} - b_S\vec{e_\varphi}$

d) $\vec{v}_{(t \overset{!}{=} T)} \overset{!}{=} \vec{0}$

$\rightarrow \quad 0 = -b_S T + v_0$

$T = \frac{v_0}{b_S}$

Aufgabe 2.5 - Translation und Rotation

Eine Stange ist in ihrem Mittelpunkt Q gemäß $x_{S(t)} = \pi \sin(\Omega t)$ geführt und dreht sich gleichzeitig mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\varphi}_{(t)}$. Im inneren der Stange gleitet ein Massenpunkt P reibungsfrei. Besimmen Sie für das rahmenfeste Bezugssystem B die Vektoren:

a) $\vec{r}_{rel}$, $\vec{v}_{rel}$, $\vec{v}_{Führ}$, $\vec{v}_{ab}$

b) $\vec{a}_{rel}$, $\vec{a}_{Führ}$, $\vec{a}_{cor}$, $\vec{a}_{abs}$

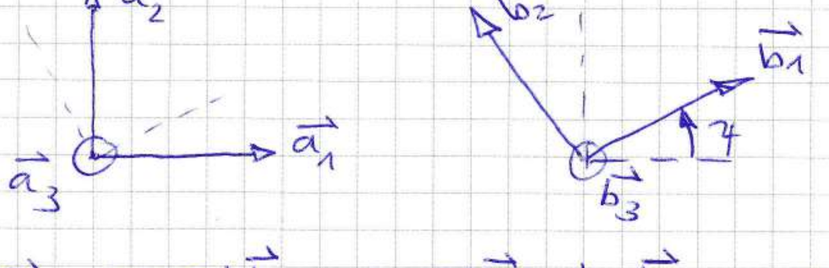
---

a) $\vec{r}_{rel} = u\, \vec{b}_1$

$$\vec{v}_{rel} = \frac{{}^B d}{dt}\, \vec{r}_{rel} = \dot{u}\, \vec{b}_1$$

$$\vec{v}_{F,T} = \vec{v}_Q = \dot{x}_{S(t)}\, \vec{a}_1 = (\pi \cos(\Omega t)\, \Omega)\, \vec{a}_1$$

Koordinatentransformation



$\vec{a}_1 = \cos(\varphi)\, \vec{b}_1 - \sin(\varphi)\, \vec{b}_2$	$\vec{b}_1 = \cos(\varphi)\, \vec{a}_1 + \sin(\varphi)\, \vec{a}_2$
$\vec{a}_2 = \sin(\varphi)\, \vec{b}_1 + \cos(\varphi)\, \vec{b}_2$	$\vec{b}_2 = -\sin(\varphi)\, \vec{a}_1 + \cos(\varphi)\, \vec{a}_2$
$\vec{a}_3 = \vec{b}_3$	$\vec{a}_3 = \vec{b}_3$

$$\vec{v}_{F,T} = \left(\pi \Omega \cos(\Omega t)\right)\left[\cos(\varphi)\vec{b}_1 - \sin(\varphi)\vec{b}_2\right]$$

$$\vec{v}_{F,R} = {}^{A}\vec{\omega}^{B} \times \vec{r}_{rel} \quad ; \quad {}^{A}\vec{\omega}^{B} = \dot{\varphi}\,\vec{b}_3$$

$$\vec{v}_{F,R} = \dot{\varphi}\,\vec{b}_3 \times u\,\vec{b}_1 = u\dot{\varphi}\,(\vec{b}_3 \times \vec{b}_1) = u\dot{\varphi}\,\vec{b}_2$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{rel} + \vec{v}_{F,T} + \vec{v}_{F,R}$$

$$\vec{v}_{abs} = \dot{u}\,\vec{b}_1 + \pi\Omega\cos(\Omega t)\left[\cos(\varphi)\vec{b}_1 - \sin(\varphi)\vec{b}_2\right] + u\dot{\varphi}\,\vec{b}_2$$

$$\vec{v}_{abs} = \left[\dot{u} + \pi\Omega\cos(\Omega t)\cos(\varphi)\right]\vec{b}_1 + \left[u\dot{\varphi} - \pi\Omega\cos(\Omega t)\sin(\varphi)\right]\vec{b}_2$$

b) $$\vec{a}_{rel} = \frac{{}^{B}d}{dt}\,\vec{v}_{rel} = \ddot{u}\,\vec{b}_1$$

$$\vec{a}_{F,T} = \vec{a}_Q = \ddot{x}_S(t)\,\vec{a}_1 = -\pi\Omega^2\sin(\Omega t)\,\vec{a}_1$$

$$= -\pi\Omega^2\sin(\Omega t)\left[\cos(\varphi)\vec{b}_1 - \sin(\varphi)\vec{b}_2\right]$$

$$\vec{a}_{F,R} = a^{(r)}_{F,R} + a^{(t)}_{F,R}$$

$$= \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{rel}) + \dot{\vec{\omega}} \times \vec{r}_{rel}$$

$$= \dot{\varphi}\vec{b}_3 \times (\dot{\varphi}\vec{b}_3 \times \vec{u}\,\vec{b}_1) + \ddot{\varphi}\,\vec{b}_3 \times u\vec{b}_1$$

$$= -u\dot{\varphi}^2\,\vec{b}_1 + u\ddot{\varphi}\,\vec{b}_2$$

SMK

$$\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{rel})$$

$$= -\omega^2 r\,\vec{e}_{rel}$$

Sauersche Multiplikations-
konvention

$$a_{Cor} = 2\, \vec{\omega} \times \vec{v}_{rel} = 2\, \dot{\psi}\, \vec{b}_3 \times \dot{u}\, \vec{b}_1 = 2\, \dot{\psi}\, \dot{u}\, \vec{b}_2$$

$$\vec{a}_{abs} = -\pi\, \Omega^2 \sin(\Omega t) \left[\cos(\psi)\, \vec{b}_1 - \sin(\psi)\, \vec{b}_2\right] - u\, \dot{\psi}^2\, \vec{b}_1$$

$$+ u\, \ddot{\psi}\, \vec{b}_2 + 2\, \dot{\psi}\, \dot{u}\, \vec{b}_2 + \ddot{u}\, \vec{b}_1$$

$$\vec{a}_{abs} = \left[\ddot{u} - u\, \dot{\psi}^2 - \pi\, \Omega^2 \sin(\Omega t) \cos(\psi)\right] \vec{b}_1$$

$$+ \left[u\, \ddot{\psi} + 2\, \dot{u}\, \dot{\psi} + \pi\, \Omega^2 \sin(\Omega t) \sin(\psi)\right] \vec{b}_2$$

Aufgabe 2.6 - Roboterarm

Ein Roboterarm der Länge $2l$ ist um φ zur horizontalen geneigt und führt eine Drehbewegung mit $\omega(t)$ um die Achse $\overline{AB}$ aus. Am Gelenkpunkt P bewegt sich ein Ausleger der Länge l mit $\dot{\psi}$ in der $\vec{b}_1\vec{b}_3$-Ebene. Berechnen Sie für den Punkt Q des Auslegers im System B:

a) $\vec{r}_{rel}$, $\vec{v}_{rel}$, $\vec{v}_{Führ}$, $\vec{v}_{abs}$

b) $\vec{a}_{rel}$, $\vec{a}_{Führ}$, $\vec{a}_{cor}$, $\vec{a}_{abs}$

1) $\vec{r}_{rel} = 2l\vec{b}_1 + [\cos(\psi)\vec{b}_1 + \sin(\psi)\vec{b}_3]\, l$

$*$

$\vec{v}_{rel} = {}^{B}\frac{d}{dt}\vec{r}_{rel} = l[-\sin(\psi)\vec{b}_1 + \cos(\psi)\vec{b}_3]\,\dot{\psi}$

$\vec{v}_{Führ} = \vec{v}_{Führ,R} + \underbrace{\cancel{\vec{v}_{Führ,T}}}_{=0}$ keine Translation von Q

$\vec{v}_{Führ} = {}^{A}\vec{\omega}^{B} \times \vec{r}_{rel}$ $\quad |{}^{A}\vec{\omega}^{B}| = \omega$

$= {}^{A}\vec{\omega}^{B}\,\vec{b}_3 \times (2l\vec{b}_1 + l[\cos(\psi)\vec{b}_1 + \sin(\psi)\vec{b}_3])$

$= 2\omega l\vec{b}_2 + \omega l[\cos(\psi)\vec{b}_2 + \underbrace{\sin(\psi)\cdot\vec{0}}_{=0}]$

$= 2\omega l\vec{b}_2 + \omega l\cos(\psi)\vec{b}_2$

$= \omega l[2 + \cos(\psi)]\,\vec{b}_2$

$\vec{v}_{abs} = \vec{v}_{Führ} + \vec{v}_{rel}$

$= \omega l[2 + \cos(\psi)]\vec{b}_2 + l\dot{\psi}[-\sin(\psi)\vec{b}_1 + \cos(\psi)\vec{b}_3]$

2) $\vec{a}_{rel} = {}^{B}\frac{d}{dt}\vec{v}_{rel}$

$= -l\dot{\psi}^2[\cos(\psi)\vec{b}_1 + \sin(\psi)\vec{b}_3] + l\ddot{\psi}[-\sin(\psi)\vec{b}_1 + \cos(\psi)\vec{b}_3]$

$\vec{a}_{Führ} = \underbrace{\vec{a}_{Führ,T}}_{=0 \text{ weil } \vec{v}_{Führ,T}=0} + \vec{a}^{(t)}_{Führ,R} + \vec{a}^{(r)}_{Führ,R}$

$\vec{a}^{(t)}_{Führ,R} = {}^{A}\vec{\alpha}^{B} \times \vec{r}_{rel} = \dot{\omega}\vec{b}_3 \times (2l\vec{b}_1 + l[*])$

${}^{A}\vec{\alpha}^{B} = \dot{\omega}$ $\quad = 2l\dot{\omega}\vec{b}_2 + \dot{\omega}l\cos(\psi)\vec{b}_2 + 0$

$$\vec{a}_{Führ,R}^{(r)} = {}^{A}\vec{\omega}^{B} \times \left({}^{A}\vec{\omega}^{B} \times \vec{r}_{rel} \right)$$

$$= {}^{A}\vec{\omega}^{B} \times \left(\omega \ell \left[2 + \cos(\varphi) \right] \vec{b}_2 \right)$$

$$= -\omega^2 \ell \left[2 + \cos(\varphi) \right] \vec{b}_1 \checkmark$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2 \, {}^{A}\vec{\omega}^{B} \times \vec{v}_{rel}$$

$$= 2 \left[\omega \vec{b}_3 \times \ell \dot{\varphi} \left(-\sin(\varphi) \vec{b}_1 + \cos(\varphi) \vec{b}_3 \right) \right]$$

$$= -2 \omega \ell \dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{b}_2 \checkmark$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{abs} = \vec{a}_{Führ,R}^{(t)} + \vec{a}_{Führ,R}^{(r)} + \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{Cor}$$

$$\vec{a}_{abs} = \ell \dot{\omega} \left(2 + \cos(\varphi) \right) \vec{b}_2$$

$$- \omega^2 \ell \left[2 + \cos(\varphi) \right] \vec{b}_1$$

$$- \ell \dot{\varphi}^2 \left(\cos(\varphi) \vec{b}_1 + \sin(\varphi) \vec{b}_3 \right) + \ell \ddot{\varphi} \left[-\sin(\varphi) \vec{b}_1 + \cos(\varphi) \vec{b}_3 \right]$$

$$- 2 \omega \ell \dot{\varphi} \sin(\varphi) \vec{b}_2$$

$$\vec{a}_{abs} = \begin{pmatrix} -\omega^2 \ell \left(2 + \cos(\varphi) \right) - \ell \dot{\varphi}^2 \cos(\varphi) - \ell \ddot{\varphi} \sin(\varphi) \\ \ell \dot{\omega} \left(2 + \cos(\varphi) \right) - 2 \omega \ell \dot{\varphi} \sin(\varphi) \\ - \ell \dot{\varphi}^2 \sin(\varphi) + \ell \ddot{\varphi} \cos(\varphi) \end{pmatrix} \vec{b}_i$$

Aufgabe 2.7 - Rheinufer

Bei Breisach am Rhein fließt der namensgebende Rhein mit einer konstanten Geschwindigkeit v nahezu exakt nach Norden und überquert dort den 48. nördlichen Breitengrad. Für die Berechnungen sei die Erde eine Kugel mit Radius R, die sich mit Ω um $\vec{b}_3$ dreht. Ermitteln Sie im erdfesten, mitdrehendem System B:

a) $\vec{r}_{rel}$, $\vec{v}_{rel}$, $\vec{v}_{Führ}$, $\vec{v}_{abs}$

b) $\vec{a}_{rel}$, $\vec{a}_{Führ}$, $\vec{a}_{cor}$, $\vec{a}_{abs}$

a) $\vec{r}_{rel} = R\left(\cos(\varphi)\,\vec{b}_2 + \sin(\varphi)\,\vec{b}_3\right)$

$$\vec{v}_{rel} = \frac{{}^{B}d}{dt}\vec{r}_{rel} = \underbrace{\dot{\varphi} R}_{\text{Fließgeschwindigkeit}}\left(-\sin(\varphi)\,\vec{b}_2 + \cos(\varphi)\,\vec{b}_3\right)$$

$$\vec{v}_{rel} = v\left(-\sin(\varphi)\,\vec{b}_2 + \cos(\varphi)\,\vec{b}_3\right) \quad \Big|\ v = R\dot{\varphi}$$

$\vec{v}_{F,T} = \vec{0}$, weil keine Translation

$$\vec{v}_{F,R} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{rel} = \Omega\,\vec{b}_3 \times R\left(\cos(\varphi)\,\vec{b}_2 + \sin(\varphi)\,\vec{b}_3\right)$$
$$= -\Omega R\cos(\varphi)\,\vec{b}_1$$

$$\vec{v}_{abs} = -\Omega R\cos(\varphi)\,\vec{b}_1 - v\sin(\varphi)\,\vec{b}_2 + v\cos(\varphi)\,\vec{b}_3$$

$$b)\quad \vec{a}_{rel} = {}^{B}\frac{d}{dt}\vec{v}_{rel} = \overbrace{\cancel{R\ddot{\varphi}}}^{=0,\ \text{weil}\ \dot{\varphi} = \frac{v}{R} = \text{Konst}}\left(-\sin(\varphi)\,\vec{b}_2 + \cos(\varphi)\,\vec{b}_3\right)$$
$$+ R\,\dot{\varphi}^2\left(-\cos(\varphi)\,\vec{b}_2 - \sin(\varphi)\,\vec{b}_3\right)$$

$$\vec{a}_{rel} = -\frac{v^2}{R}\left(\cos(\varphi)\,\vec{b}_2 + \sin(\varphi)\,\vec{b}_3\right)$$

$$\vec{a}_{F,T} = \vec{0}$$

$$\vec{a}_{F,R} = a^{(r)}_{F,R} + \underbrace{\cancel{a^{(t)}_{F,R}}}_{=0,\ \text{weil}\ \dot{\omega} = \alpha = \dot{\Omega} = 0\ ;\ \Omega = \text{Konst.}}$$

$$\vec{a}_{F,R} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{rel}) = \vec{\omega} \times \vec{v}_{F,R}$$
$$= \Omega\,\vec{b}_3 \times \left(-\Omega R \cos(\varphi)\,\vec{b}_1\right)$$
$$= -R\,\Omega^2 \cos(\varphi)\,\vec{b}_2$$

$$\vec{a}_{Cor} = 2\,\vec{\omega} \times \vec{v}_{rel}$$
$$= 2\,\Omega\,\vec{b}_3 \times \left(v\left(-\sin(\varphi)\,\vec{b}_2 + \cos(\varphi)\,\vec{b}_3\right)\right)$$
$$= 2\,v\,\Omega \sin(\varphi)\,\vec{b}_1$$

$$\vec{a}_{abs} = 2\,v\,\Omega \sin(\varphi)\,\vec{b}_1$$
$$-\left(\frac{v^2}{R} + R\,\Omega^2\right)\cos(\varphi)\,\vec{b}_2$$
$$-\frac{v^2}{R}\sin(\varphi)\,\vec{b}_3$$

Aufgabe 2.8 – Zweistabpendel

Eine ebene Scheibe ist an zwei parallelen Stangen der Länge r befestigt. Die Stangen rotieren mit der Winkelgeschwindigkeit Ω = konst. um ihre Lagerpunkte. In die Scheibenebene ist eine kreisförmige Nut mit dem Radius a und dem Mittelpunkt Q eingearbeitet, in der sich ein Massenpunkt m frei bewegt.

Bestimmen Sie im System $\mathcal{B}$:

a) $\vec{r}_{rel}$, $\vec{v}_{rel}$, $\vec{v}_{Führ}$, $\vec{v}_{abs}$

b) $\vec{a}_{rel}$, $\vec{a}_{Führ}$, $\vec{a}_{cor}$, $\vec{a}_{abs}$

Aufgabe TM III

1) $r_{rel} = a\cos(\varphi)\vec{b}_1 + a\sin(\varphi)\vec{b}_2$

$$\vec{v}_{rel} = {}^{B}\frac{d}{dt}\vec{r}_{rel} = a\left[-\sin(\varphi)\dot{\varphi}\vec{b}_1 + \cos(\varphi)\dot{\varphi}\right]\vec{b}_2$$

$$= a\dot{\varphi}\underbrace{\left[-\sin(\varphi)\vec{b}_1 + \cos(\varphi)\vec{b}_2\right]}_{*}$$

$$\vec{V}_{Führ} = \underbrace{\cancel{\vec{V}_{Führ,R}}}_{=0} + \vec{V}_{Führ,T}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\vec{a}_1 = \vec{b}_1 \\ \vec{a}_2 = \vec{b}_2\end{array}}$$

$$\vec{V}_{Führ,T} = \vec{v}_Q = {}^{A}\frac{d}{dt}\vec{r}_{OQ}$$

$$\vec{r}_{OQ} = \left[\cos(\varphi)\vec{a}_1 + \sin(\varphi)\vec{a}_2\right]r$$

$$= r\left[\cos(\Omega t)\vec{a}_1 + \sin(\Omega t)\vec{a}_2\right]$$

$$\vec{V}_Q = \Omega r\left[-\sin(\Omega t)\vec{a}_1 + \cos(\Omega t)\vec{a}_2\right] = \vec{v}_{Führ,T}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{abs} = \vec{v}_{Führ,T} + \vec{v}_{rel}$$

$$\vec{v}_{abs} = \vec{V}_{Führ,T} + \underbrace{\cancel{\vec{V}_{Führ,R}}}_{=0 \text{ weil } {}^{A}\vec{\omega}^{B}=0} + \vec{v}_{rel}$$

$$= \Omega r\left[-\sin(\Omega t)\vec{a}_1 + \cos(\Omega t)\vec{a}_2\right]$$
$$+ a\dot{\varphi}\left[-\sin(\varphi)\vec{b}_1 + \cos(\varphi)\vec{b}_2\right]$$

2) $$\vec{a}_{rel} = {}^{B}\frac{d}{dt}\vec{v}_{rel}$$

$$= a\ddot{\varphi}\left[\ldots^{*}\right] + a\dot{\varphi}\left[-\cos(\varphi)\vec{b}_1 - \sin(\varphi)\vec{b}_2\right]\dot{\varphi}$$

$$= a\ddot{\varphi}\left[*\right] - a\dot{\varphi}^2\left[\cos(\varphi)\vec{b}_1 + \sin(\varphi)\vec{b}_2\right]$$

$$\vec{a}_{Führ,R}^{(t)} = \vec{a}_{Führ,R}^{(r)} = 0 = \vec{a}_{cor} \quad \text{weil } {}^{A}\vec{\omega}^{B} = 0$$

weil ${}^{A}\vec{\omega}^{B} = \vec{0}$ weil B keine Drehung um A aufweist.

$$\vec{a}_{Führ,T} = {}^{A}\frac{d}{dt}\,\vec{v}_{Führ,T}$$

$$= \Omega^2 r\left[-\cos(\Omega t)\vec{a}_1 - \sin(\Omega t)\vec{a}_2\right]$$

$$= -\Omega^2 r\left[\cos(\Omega t)\vec{a}_1 + \sin(\Omega t)\vec{a}_2\right]$$

$$\Rightarrow \vec{a}_{abs} = \vec{a}_{rel} + \vec{a}_{Führ,T}$$

$$= a\ddot{\varphi}\left[-\sin(\varphi)\vec{b}_1 + \cos(\varphi)\vec{b}_2\right]$$

$$-a\dot{\varphi}^2\left[\cos(\varphi)\vec{b}_1 + \sin(\varphi)\vec{b}_2\right]$$

$$-\Omega^2 r\left[\cos(\underbrace{\Omega t}_{\varphi})\underbrace{\vec{a}_1}_{\vec{b}_1} + \sin(\underbrace{\Omega t}_{\varphi})\underbrace{\vec{a}_2}_{\vec{b}_2}\right]$$

weil $\vec{a}_1 = \vec{b}_1$ und $\vec{a}_2 = \vec{b}_2$