Gymnasium **NRW - GK**

Mathe Abitur Klausuren

Originale Prüfungsaufgaben

inkl. Lösungen & Lernvideos von

Daniel Jung

Jahr: 2023

StudyHelp

Mathe Abi Klausurenheft – NRW (Grundkurs)

Prüfungsjahr 2023

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Christian Strack
Konzept & Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

Neu ab dem Prüfungsjahr 2024:
Für Prüfungsteil A (hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgaben) wird eine begrenzte Aufgabenauswahl durch die Prüflinge eingeführt. Hierdurch verlängert sich die Arbeitszeit insgesamt um 30 Minuten (inkl. Auswahlzeit). Die Struktur der Aufgaben im Zentralabitur Mathematik ab 2024 bleibt unverändert.

1 Abi Klausur 2023 – Grundkurs

1.1 Aufgaben

1.1.1 Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: max. 60 Minuten
- Hinweis: Die Aufgaben sind nicht direkt einem Thema zugewiesen, wie es die folgende Tabelle vermuten lässt.
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Analysis	a)	(1)	3	
		(2)	2	
	b)	(1)	5	
		(2)		
	c)	(1)	2	
		(2)	3	
Vektorielle Geometrie	d)	(1)	1	
		(2)	4	
Stochastik	e)	(1)	2	
		(2)	3	

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 10,\ x \in \mathbb{R}$$
$$\text{und}\quad g(x) = -6x + 10,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) Berechnen Sie die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.

(2) Der Punkt $P(3|f(3))$ ist einer der gemeinsamen Punkte der Graphen von f und g. Zeigen Sie:
Der Graph von g ist Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

---

b) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung:

$$f(x) = 3x^2 - 12,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) Berechnen Sie die Nullstellen von f.

(2) Berechnen Sie den Inhalt der Fläche, die vom Graphen von f und der x-Achse eingeschlossen wird.

---

c) Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung

$$f(x) = x^2 \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}.$$

(1) Zeigen Sie: $f'(x) = x \cdot (x+2) \cdot e^x$.

(2) Bestimmen Sie (z.B. unter Verwendung des Vorzeichenwechselkriteriums) die Extremstellen und die Art der Extremstellen der Funktion f.

---

d) Gegeben sind die Gerade

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix},\ \text{mit } s \in \mathbb{R}$$

sowie die Gerade h durch die Punkte $A(4|0|0)$ und $B(5|1|b)$ mit einer reellen Zahl b.

(1) Begründen Sie, dass A nicht auf g liegt.

(2) Die Geraden g und h haben einen gemeinsamen Punkt.
Ermitteln Sie den Wert von b.

e) (1) Die Histogramme I bis III in den Abbildungen 1-1 bis 1-3 zeigen Wahrscheinlichkeitsverteilungen von drei binomialverteilten Zufallsgrößen A, B und C. Es gilt jeweils $n = 10$. Zu jeder Zufallsgröße gehört eine der Wahrscheinlichkeiten $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}4$ und $p_3 = 0{,}8$.

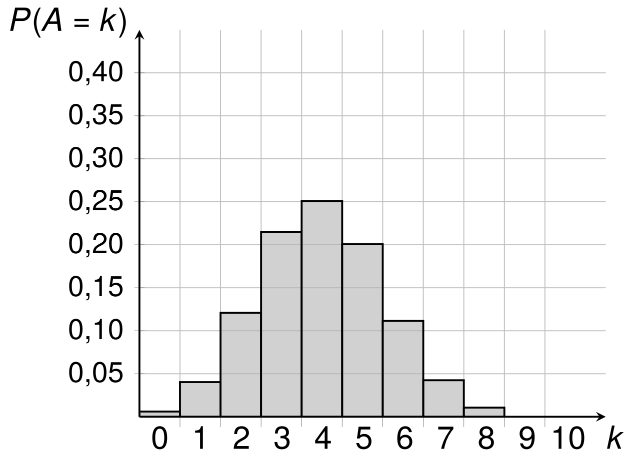


Abb. 1-1

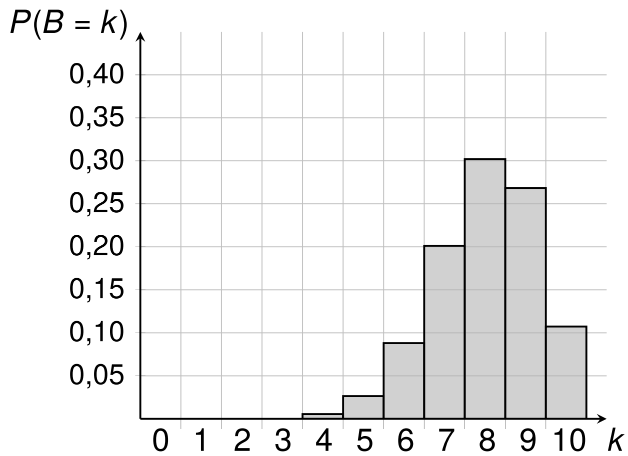


Abb. 1-2

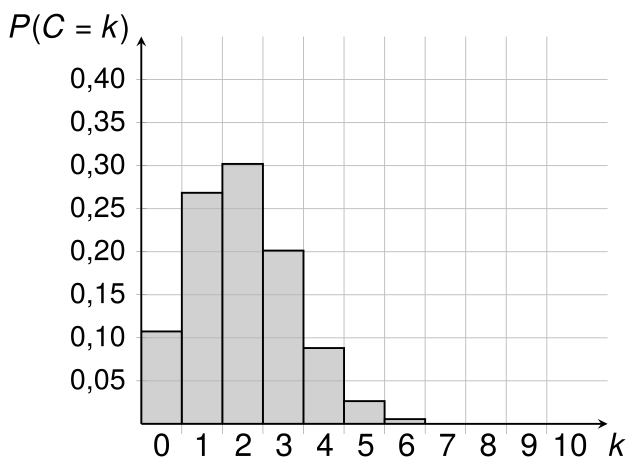


Abb. 1-3

Ordnen Sie den Histogrammen I bis III die jeweils passende Wahrscheinlichkeit zu.

(2) Eine weitere Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$.
Das unvollständige Histogramm der Verteilung ist in Abbildung 2 dargestellt. Es gilt: $P(X \geq 4) \approx 0{,}35$.

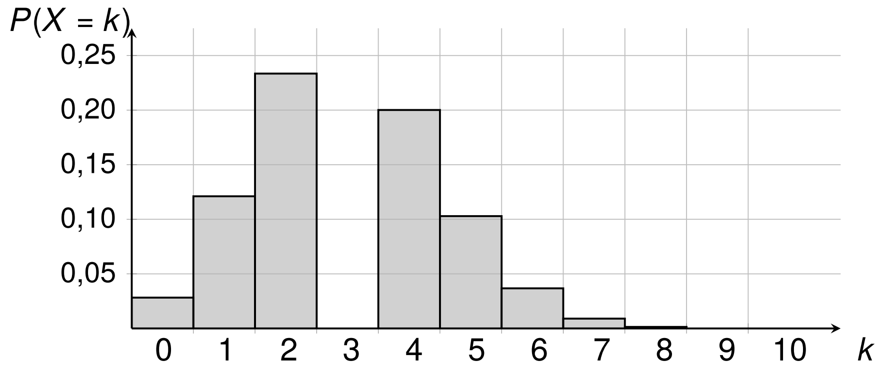


Abb. 2

(i) Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 2)$.

(ii) Ermitteln Sie näherungsweise die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$.

1.1.2 Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **Hilfsmittel** (GTR, Mathematische Formelsammlung, Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung) verwendet werden.

- Arbeitszeit: mind. 160 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Analysis	a)	(1)	2	
		(2)	3	
		(3)	3	
	b)	(1)	3	
		(2)	4	
		(3)	6	
	(c)	(1)	2	
		(2)	3	
		(3)	3	
		(4)	6	
Vektorielle Geometrie	a)	(1)	1	
		(2)	3	
		(3)	1	
		(4)	3	
	b)	(1)	2	
		(2)	2	
	c)	(1)	2	
		(2)	4	
		(3)	2	
Stochastik	a)	(1)	2	
		(2)	3	
		(3)	2	
	b)	(1)	2	
		(2)	3	
	c)	(1)	2	
		(2)	2	
	d)	(1)	2	
		(2)	2	

Analysis

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen

$$p : x \mapsto -x^2 - x + 1 \text{ und } q : x \mapsto e^{-x}.$$

Die Graphen von p und q haben genau einen gemeinsamen Punkt; dieser Punkt liegt auf der y-Achse. Für die erste Ableitungsfunktion von q gilt

$$q'(x) = -q(x).$$

(1) Beschreiben Sie, wie der Graph von q' aus dem Graphen von q erzeugt werden kann.

(2) Zeigen Sie, dass die Graphen von p und q in ihrem gemeinsamen Punkt eine gemeinsame Tangente haben, und geben Sie eine Gleichung dieser Tangente an.

(3) Geben sie den Wert des Integrals

$$\int_0^2 (q(x) - p(x))\,\mathrm{d}x$$

an und interpretieren Sie diesen Wert geometrisch.

---

b) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $h : x \mapsto (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x}$.

(1) Bestimmen Sie die Größe der Fläche, die der Graph von h und die x-Achse einschließen.

(2) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Extrempunkte des Graphen von h sowie den Abstand der Extrempunkte.

(3) Die beiden Extrempunkte T und H des Graphen von h bilden zusammen mit den Punkten P und Q ein Rechteck $TPHQ$, dessen Seiten parallel zu den Koordinatenachsen verlaufen. Dieses Rechteck wird durch den Graphen der Funktion h in zwei Teilstücke zerlegt (siehe Abbildung 1).

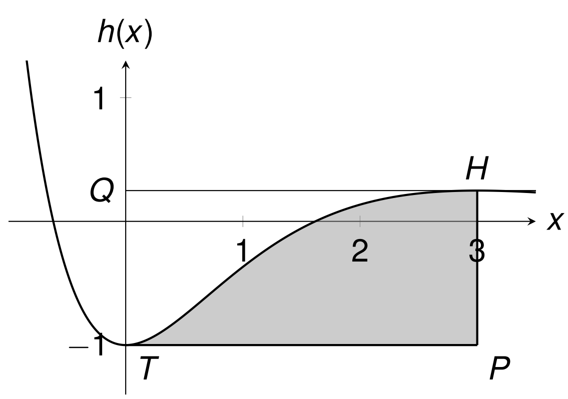


Abb. 1

Ermitteln Sie, welchen Anteil an der Fläche des Rechtecks die Fläche des grauen Teilstücks einnimmt.

c) Ein Bewässerungskanal wird durch Öffnen einer Schleuse in Betrieb genommen. Die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion

$$w : x \mapsto 4 \cdot (x^2 - x - 1)e^{-x} + 4$$

beschreibt für $x \geq 0$ die zeitliche Entwicklung der momentanen Durchflussrate des Wassers an einer Messstelle. Dabei ist x die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Sekunden und $w(x)$ die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde.

Abbildung 2 zeigt den Graphen von w.

Abb. 2

(1) Für $x \to \infty$ gilt $w(x) \to c$.
Geben Sie den Wert von c sowie die Bedeutung dieses Wertes im Sachzusammenhang an.

(2) Bestimmen Sie diejenigen Stellen, an denen die momentane Änderungsrate der Funktion w mit der mittleren Änderungsrate der Funktion w über dem Intervall $[0; 10]$ übereinstimmt.

(3) Bestimmen Sie die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt in den ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn, zu dem sie am stärksten abnimmt.

(4) (i) Bestimmen Sie die Wassermenge, die in den ersten zwei Sekunden seit Beobachtungsbeginn an der Messstelle vorbeifließt.

(ii) An der Messstelle fließen in einem Zeitraum von drei Sekunden dreizehn Kubikmeter vorbei.
Berechnen Sie die dafür infrage kommenden Zeiträume.

Geometrie

Aufgabenstellung:

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper K mit den Eckpunkten

$$A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3 \text{ und } B_4$$

hat folgende Eigenschaften:

$A_1A_2A_3A_4$ ist ein Rechteck in der x_1x_2-Ebene, $B_1B_2B_3B_4$ ist ein Rechteck in einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene. Die Vierecke $A_2A_3B_3B_2$ und $A_1A_4B_4B_1$ liegen in Ebenen, die parallel zur x_1x_3-Ebene verlaufen.

Folgende Punkte sind gegeben:

$A_1(50|-5|0)$

$A_2(50|5|0)$

$A_3\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\middle|5\middle|0\right)$

$A_4\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\middle|-5\middle|0\right)$

$B_2(10|5|30)$

$B_3\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\middle|5\middle|30\right)$

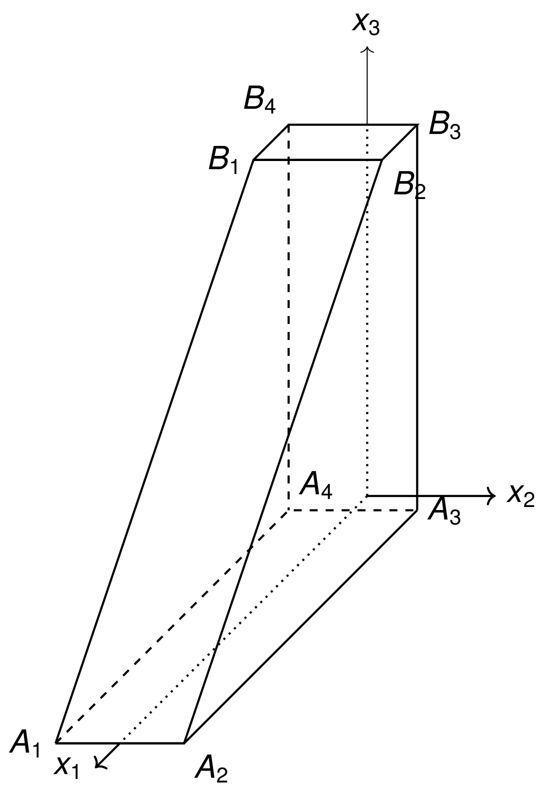


Abb. 1

a) (1) Geben Sie die Koordinaten des Punktes B_1 an.

(2) Begründen Sie, dass die Seitenfläche $A_2A_3B_3B_2$ ein Trapez ist, und berechnen Sie das Volumen des Körpers K.

(3) Berechnen Sie den Winkel zwischen $\overline{A_2A_3}$ und $\overline{A_2B_2}$.

Der Körper K ist Teil eines mathematischen Modells eines Architekturbüros zur Planung eines neuen Hotels, das aus drei Gebäuden bestehen soll, die jeweils die gleiche Form besitzen (siehe Abbildung 2). Durch den Körper K wird Gebäude *I* modelliert, die Gebäude *II* und *III* sind gegenüber Gebäude *I* jeweils um 120° gedreht. Alle drei Gebäude stehen so aneinander, dass sie einen dreieckigen Innenhof bilden. In der Modellierung liegt dieser Innenhof in der x_1x_2-Ebene.

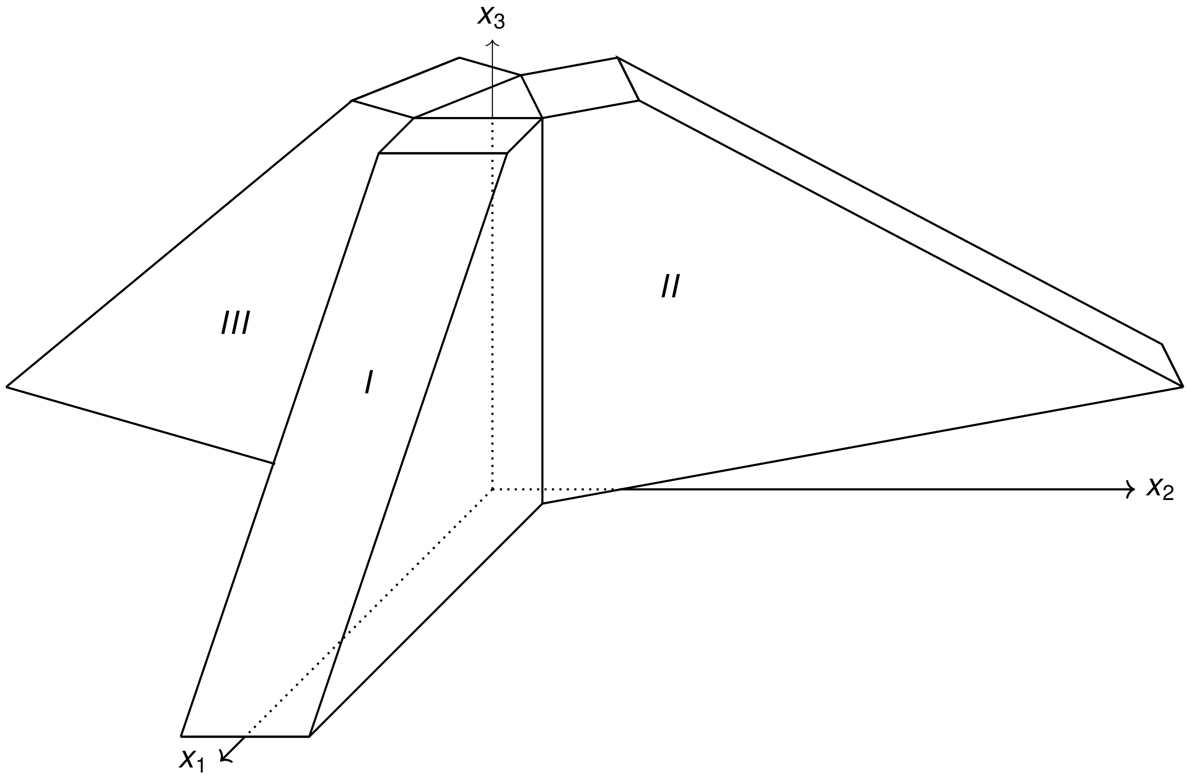


Abb. 2

Die nebenstehende Abbildung 3 zeigt das Modell des Hotels von oben.

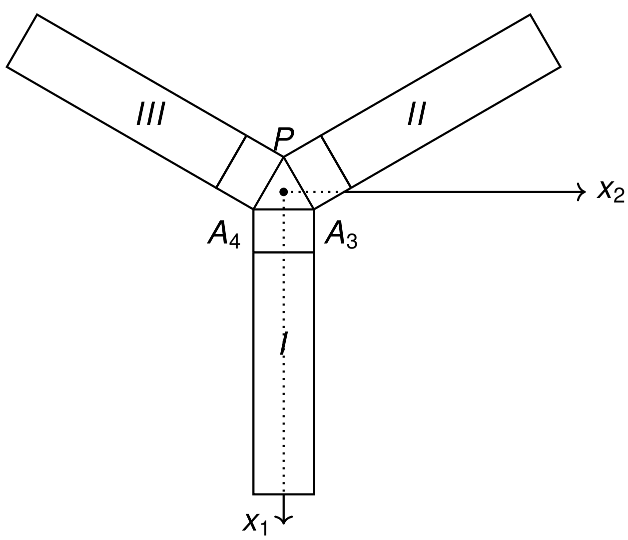


Abb. 3

b) Der Innenhof A_4A_3P hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks.

1) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes P.

$\left[\text{Zur Kontrolle: } P\left(-\frac{2\cdot\sqrt{75}}{3}\middle|0\middle|0\right) \approx P(-5{,}77|0|0)\right]$

2) Berechnen Sie den Abstand von A_4 zum Koordinatenursprung $O(0|0|0)$.

c) 1) Begründen Sie, dass es sich bei

$$E:\vec{x} = \begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}, \quad r, s \in \mathbb{R},$$

um die Ebene handelt, in der die Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt.

2) In der Mitte des Innenhofs steht ein Mast, dessen Spitze im Punkt $S(0|0|35)$ liegt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt steht die Sonne so, dass die Sonnenstrahlen die Richtung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

besitzen. Untersuchen Sie, ob der Schatten der Spitze des Masts zu diesem Zeitpunkt innerhalb der Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt.

Stochastik

Aufgabenstellung:

Ein Team eines Instituts für Tourismus führte bei 10 000 Personen aus einer Region, die im Jahr 2019 Urlaub gemacht hatten, eine repräsentative Befragung durch. Im Folgenden beziehen sich alle Aussagen und Fragestellungen auf diese Region. Von den Befragten wurde für jede Urlaubsreise ein Fragebogen ausgefüllt, mit dem u. a. ermittelt wurde, mit welchen Verkehrsmitteln sie zu welchen Reisezielen angereist waren.

Dabei ergab sich folgendes Bild: 26% der Urlaubsreisen gingen ins Inland (kurz: Inlandsreisen), davon wurde in 16% der Fälle die Bahn zur Anreise genutzt. Unter den Urlaubsreisen ins Ausland (kurz: Auslandsreisen) erfolgte die Anreise in 10% der Fälle mit der Bahn.

Diese Prozentsätze werden im Folgenden als Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Ereignisse verwendet.

a) (1) Stellen Sie die Situation in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

   (2) Bei einer Urlaubsreise im Jahr 2019 wurde die Bahn zur Anreise genutzt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um eine Inlandsreise handelte.

b) Die Befragung soll ergänzt werden. Dazu werden 20 der Fragebögen zu den Urlaubsreisen zufällig ausgewählt, um mit den Befragten Interviews zu führen. Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Inlandsreisen unter den 20 Urlaubsreisen an.

   (1) Erläutern Sie, warum für $0 \leq k \leq 20$ zur Berechnung von $P(X = k)$ in guter Näherung eine Binomialverteilung verwendet werden kann.

   (2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von den 20 Urlaubsreisen mindestens sechs Inlandsreisen sind.

   (3) Bestimmen Sie für die 20 Urlaubsreisen die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der Inlandsreisen in der 2σ-Umgebung um den Erwartungswert von X liegt.

c) Bestimmen Sie, wie viele Fragebögen mindestens ausgewählt werden müssen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% auf mindestens fünf der Fragebögen angegeben wird, dass eine Auslandsreise erfolgte.

d) Das Team des Instituts für Tourismus hat den Eindruck, dass sich in der Region der Anteil der Inlandsreisen im Jahr 2022 im Vergleich zum Jahr 2019 erhöht hat. Um dies zu untersuchen, erfasst das Team für 100 Reisen aus dem Jahr 2022, ob es sich um eine Inlands- oder Auslandsreise gehandelt hat.
   Bei 34 oder mehr Inlandsreisen geht das Team davon aus, dass sich der Anteil der Inlandsreisen erhöht hat.

(1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Team fälschlicherweise davon ausgeht, dass sich der Anteil der Inlandsreisen erhöht hat, obwohl der Anteil unverändert geblieben ist.

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass das Team von einem unveränderten Anteil von Inlandsreisen ausgeht, wenn dieser Anteil tatsächlich aber auf 30% gestiegen ist.

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

Lösung:

a) (1) Um die gemeinsamen Punkte zweier Funktionen zu bestimmen, setzen wir die beiden Funktionsgleichungen gleich und bestimmen die Lösung der Gleichung:

Schnittpunkte

$$\begin{aligned} f(x) \stackrel{!}{=} g(x) \quad \Rightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 3x + 10 &= -6x + 10 && \mid -(-6x + 10) \\ \Leftrightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 && \mid \text{ausklammern} \\ \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 6x + 9) &= 0 \end{aligned}$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist ein Produkt Null, wenn einer der Faktoren Null ist. In diesem Fall ist also entweder $x = 0$ oder $x^2 - 6x + 9 = 0$. Für die zweite Gleichung, nutzen wir die pq-Formel:

Satz vom Nullprodukt

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x &= -\frac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-6}{2}\right)^2 - 9} \\ &= 3 \pm \sqrt{3^2 - 9} \\ &= 3 \pm \sqrt{9 - 9} \\ &= 3 \end{aligned}$$

Die gesuchten Stellen[1], an denen die Graphen gemeinsame Punkte besitzen, lauten $x = 0$ und $x = 3$.

(2) Damit der Graph von g eine Tangente von f im Punkt P ist, muss der Punkt P auf beiden Graphen liegen und beide Graphen müssen in diesem Punkt dieselbe Steigung besitzen.
Wir benötigen daher zunächst die Ableitungsfunktionen:

Tangente

$$\begin{aligned} g'(x) &= -6 \\ f'(x) &= 3x^2 - 12x + 3 \end{aligned}$$

Die Steigung von g ist konstant und beträgt $g'(3) = m = -6$, da g eine Gerade ist. An der Stelle $x = 3$ hat die Funktion f die Steigung:

$$\begin{aligned} f'(3) &= 3 \cdot 3^2 - 12 \cdot 3 + 3 \\ &= 27 - 36 + 3 \\ &= -6 \qquad \checkmark \end{aligned}$$

Somit ist der Graph von g die Tangente von f im Punkt P.

[1] Stelle = x-Koordinate | Punkt = x- und y-Koordinate

b) (1) Um die Nullstellen einer Funktion zu berechnen, setzen wir den Term gleich Null und lösen nach der Unbekannten (hier x) auf:

Gleichung lösen

$$\begin{aligned} f(x) \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad 3x^2 - 12 &= 0 && \mid +12 \\ \Leftrightarrow \quad 3x^2 &= 12 && \mid \div 3 \\ \Leftrightarrow \quad x^2 &= 4 && \mid \sqrt{\cdots} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen liegen bei $x = -2$ und $x = 2$.

(2) Bei dem Graphen der Funktion handelt es sich um eine Parabel. Wir wissen zudem aufgrund des positiven Vorzeichens von $3x^2$, dass die Parabel nach oben geöffnet ist und der Tiefpunkt bei -12 liegt. Zwischen den beiden Nullstellen $x = -2$ und $x = 2$ wird somit eine Fläche unterhalb der x-Achse vom Graphen von f eingeschlossen.

Stammfunktion

Der Flächeninhalt lässt sich mittels der Integralrechnung bestimmen:

Fläche Graph und x-Achse

$$\begin{aligned} \int_{-2}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-2}^{2} 3x^2 - 12\,\mathrm{d}x \\ &= \left[3 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 - 12 \cdot x\right]_{-2}^{2} \\ &= 2^3 - 12 \cdot 2 - ((-2)^3 - 12 \cdot (-2)) \\ &= 8 - 24 - (-8 + 24) \\ &= -32 \end{aligned}$$

Da die Fläche unterhalb der x-Achse liegt, ergibt das Integral einen negativen Wert. Den Flächeninhalt erhalten wir durch Verwendung der Betragsstriche: $|-32| = 32$ FE.

---

c) (1) Um zu zeigen, dass die angegebene Funktionsgleichung die Ableitungsfunktion beschreibt, leiten wir $f(x)$ ab.

Produktregel

> **Produktregel**:
>
> $$f(x) = u(x) \cdot v(x) \to f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Mit $u(x) = x^2 \to u'(x) = 2x$ und $v(x) = e^x \to v'(x) = e^x$ folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^2 \cdot e^x\right)' \\ &= 2x \cdot e^x + x^2 \cdot e^x \\ &= x \cdot (2 + x) \cdot e^x \\ &= x \cdot (x + 2) \cdot e^x \quad \checkmark \end{aligned}$$

(2) Für die potentiellen Extremstellen benötigen wir die Nullstellen der Ableitungsfunktion, welche in (1) bereits gegeben und von uns gezeigt wurde. Mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt können wir die Nullstellen sofort ablesen, denn die Exponentialfunktion e^x wird für kein $x \in \mathbb{R}$ Null. Also sind $x = 0$ und $x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ möglichen Extremstellen.

Um zu prüfen, ob es sich tatsächlich um Extremstellen handelt und ob es sich dabei um Hoch- oder Tiefpunkte handelt, können wir das Vorzeichenwechselkriterium anwenden. Liegt an den Stellen ein Vorzeichenwechsel der Steigung vor, so liegt tatsächlich eine Extremstelle vor. Wir benötigen also die Steigung an einer Stelle vor $x = -2$, eine zwischen den Kandidaten für die Extremstellen und eine Stelle nach $x = 0$:

VZWK

x	-3	-2	-1	0	1
$f'(x)$	$3 \cdot e^{-3}$	0	$-1 \cdot e^{-1}$	0	$3 \cdot e^{1}$
Vorzeichen	$+$	0	$-$	0	$+$

Wir sehen, dass an der Stelle $x = -2$ ein Wechsel von positiver zu negativer Steigung vorliegt. Dabei handelt es sich also um ein lokales Maximum.

An der Stelle $x = 0$ liegt ein Wechsel von negativer zu positiver Steigung vor, also handelt es sich bei $x = 0$ um ein lokales Minimum.

Alternativ hätten wir die Aufgabe auch mit der hinreichenden Bedingung lösen können. Dafür hätten wir allerdings die zweite Ableitung bilden müssen.

---

d) (1) Um zu prüfen, ob ein Punkt auf einer Geraden liegt, setzen wir die Geradengleichung gleich dem Punkt und prüfen, ob der Parameter der Geraden für alle Koordinaten denselben Wert ergibt:

Punktprobe

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcrcrcl} 4 & = & 2 + 1 \cdot s & \Leftrightarrow & s & = & 2 \\ 0 & = & 3 + 0 \cdot s & \Leftrightarrow & 0 & = & 3 \ \lightning \\ 0 & = & -7 + 5 \cdot s & \Leftrightarrow & s & = & \frac{7}{5} \end{array}$$

Betrachten wir die zweite Zeile, so sehen wir bereits, dass die Gleichung $0 = 3 + s \cdot 0 = 3$ nicht lösbar ist. Damit kann der Punkt A nicht auf der Geraden g liegen.

(2) Zuerst stellen wir eine Geradengleichung für h in Abhängigkeit von b auf. Dafür nehmen wir $\vec{a}$ als Stützvektor und $\overrightarrow{ab}$ als Richtungsvektor:

$$h : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \left(\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}, \ r \in \mathbb{R}$$

Um die Geraden auf gemeinsame Punkte zu untersuchen, setzen wir beide Gleichungen gleich:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ b \end{pmatrix}$$

Jede Koordinate liefert uns nun eine Gleichung. Wir erhalten somit ein LGS mit 3 Unbekannten und 3 Gleichungen:

$$\begin{array}{rrcll}
\text{I:} & 2 + s & = & 4 + r & \\
\text{II:} & 3 & = & r & \\
\text{III:} & -7 + 5s & = & rb & \\
\hline
r = 3 \text{ in I:} & 2 + s & = & 4 + 3 & \\
\Leftrightarrow & s & = & 5 & \\
\hline
r = 3, s = 5 \text{ in III:} & -7 + 5 \cdot 5 & = & 3b & \\
\Leftrightarrow & 18 & = & 3b & \quad | : 3 \\
\Leftrightarrow & 6 & = & b &
\end{array}$$

Für $b = 6$ haben die Geraden g und h einen gemeinsamen Punkt.

---

e) (1) Der Erwartungswert einer Verteilungsfunktionen ist stets der höchste Punkt des Histogramms. Mit Hilfe des Erwartungswertes lassen sich somit die Graphen den Wahrscheinlichkeiten zuordnen. Dafür bestimmen wir zuerst alle Erwartungswerte über die Formel $\mu = n \cdot p$ mit $n = 10$:

$$\begin{array}{lcll}
n \cdot p_1 = 10 \cdot 0{,}2 = 2 & & \text{Abb. 1-3}: & \mu = 2 \;\Rightarrow\; \text{III} \to p_1 \\
n \cdot p_2 = 10 \cdot 0{,}4 = 4 & \Rightarrow & \text{Abb. 1-1}: & \mu = 4 \;\Rightarrow\; \text{I} \to p_2 \\
n \cdot p_3 = 10 \cdot 0{,}8 = 8 & & \text{Abb. 1-2}: & \mu = 8 \;\Rightarrow\; \text{II} \to p_3
\end{array}$$

(2) Die betrachtete Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit $n = 10$. Bei dieser können wir nicht wirklich rechnen, sondern müssen mithilfe des Histogramms die Wahrscheinlichkeiten näherungsweise ermitteln.

(i) Für die gesuchte Wahrscheinlichkeit summieren wir alle Einzelwahrscheinlichkeiten mit $k \leq 2$. Die Einzelwahrscheinlichkeiten können wir aus dem Graphen ablesen:

$$\begin{aligned}
P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\
&\approx 0{,}03 + 0{,}12 + 0{,}24 \\
&= 0{,}38
\end{aligned}$$

(ii) Die einzige Wahrscheinlichkeit, die im Histogramm fehlt, ist für $k = 3$. Wir wissen, dass die Summe aller Einzelwahrscheinlichkeiten stets 100% ergeben muss. Wenn wir von den 100% sowohl $P(X \leq 2)$, als auch $P(X \geq 4)$ abziehen, so erhalten wir den gesuchten Wert $P(X = 3)$. Da $P(X \geq 4) \approx 0{,}35$ bereits in der Aufgabe gegeben ist, folgt:

$$\begin{aligned} P(X = 3) &= 1 - (P(X \leq 2) + P(X \geq 4)) \\ &\approx 1 - (0{,}38 + 0{,}35) \\ &= 0{,}27 \end{aligned}$$

1.2.2 Prüfungsteil B

Analysis

Lösung:

a) (1) Da die Funktion q und ihre Ableitungsfunktion q' sich nur auf ein Vorzeichen unterscheiden, folgt aus einem umgekehrten Vorzeichen die einzige Transformation.

Graphen-Transformation

Betrachten wir einen Punkt (z.B. $(1|1)$) und ändern lediglich das Vorzeichen der y-Koordinate, so spiegeln wir den Punkt an der x-Achse (z.B. $(1|-1)$).

Der Graph von q' geht also durch Spiegelung von q an der x-Achse hervor.

(2) Laut Aufgabenstellung haben die beiden Funktionsgraphen genau einen Schnittpunkt und dieser liegt auf der y-Achse. Da die Funktion p ein Polynom ist, können wir den y-Achsenabschnitt sofort ablesen: $S(0|1)$.

In diesem Punkt sollen beide Funktionsgraphen eine gemeinsame (= identische) Tangente besitzen. Eine Gerade (und somit auch eine Tangente) wird eindeutig über ihre Steigung und einen Punkt auf der Geraden definiert. Damit also bei beiden Funktionen im Schnittpunkt die Tangenten identisch sind, benötigen beide lediglich die selbe Steigung im Schnittpunkt. Dafür bestimmen wir zuerst die beiden Ableitungsfunktionen:

$$\begin{array}{rcl} p'(x) & = & -2x-1 \\ q'(x) & = & -e^{-x} \end{array} \xRightarrow{x=0 \text{ einsetzen:}} \begin{array}{rcccl} p'(0) & = & -2\cdot 0-1 & = & -1 \\ q'(0) & = & -e^{-0} & = & -1 \end{array}$$

Tangente

Somit haben beide Funktionen im Punkt S dieselbe Tangente mit der Steigung $m=-1$. Da der Schnittpunkt auf der y-Achse liegt, muss er auch y-Achsenabschnitt der Tangente sein. Somit folgt sofort die gesuchte Tangentengleichung:

$$y = -x + 1$$

(3) Das Integral lässt sich mit Hilfe des Taschenrechners bestimmen:

$$\int_0^2 (q(x)-p(x))\,\mathrm{d}x = \int_0^2 (e^x + x^2 + x - 1)\,\mathrm{d}x = \frac{11}{3} - e^{-2} \approx 3{,}53$$

Die Fläche, welche von den Graphen der Funktionen $q(x)$ und $p(x)$ sowie der Geraden mit der Gleichung $x=2$ eingeschlossen wird, hat einen Flächeninhalt von ca. 3,53 FE.

b) (1) Da wir die Fläche berechnen sollen, die der Graph mit der x-Achse einschließt, benötigen wir zuerst die Nullstellen der Funktion. Diese lassen sich mit Hilfe des Taschenrechners bestimmen:

$$h(x) \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{-(\sqrt{5}-1)}{2} \ \lor\ x = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

Nachdem wir die Grenzen des Integrals ermittelt haben, können wir mit Hilfe des Taschenrechner den Wert bestimmen. Um sicherzugehen, dass das Ergebnis positiv ist (ein Flächeninhalt ist immer positiv), nehmen wir dabei den Betrag des Integrals:

$$A = \left| \int_{\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}}^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} h(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int_{\frac{-(\sqrt{5}-1)}{2}}^{\frac{\sqrt{5}+1}{2}} (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x}\,\mathrm{d}x \right| \approx 1{,}28 \text{ FE}$$

(2) Für die Extrempunkte benötigen wir zunächst die Ableitungsfunktion $h'(x)$. Die Ableitungsfunktion lässt sich mit Hilfe der Produkt- und Kettenregel bestimmen:

Produkt- und Kettenregel

$$\begin{aligned} h'(x) &= \big((x^2 - x - 1) \cdot e^{-x}\big) \\ &= (2x - 1) \cdot e^{-x} + (x^2 - x - 1) \cdot (-1)e^{-x} \\ &= (-x^2 + 3x) \cdot e^{-x} \\ &= x \cdot (-x + 3) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Ableitungsfunktion lassen sich mit Hilfe des Satzes vom Nullprodukt sofort ablesen. Da die Exponentialfunktion für kein $x \in \mathbb{R}$ Null wird, bleiben als Nullstellen $x = 0$ und $-x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Der Aufgabenstellung nach existieren genau zwei Extremstellen. Also müssen die beiden Lösungen nicht weiter untersucht[2] werden. Wir setzen die beiden Werte in die ursprüngliche Funktion und erhalten die zugehörigen y-Koordinaten:

$$\begin{aligned} h(0) &= (0^2 - 0 - 1) \cdot e^{-0} &= -1 \\ h(3) &= (3^2 - 3 - 1) \cdot e^{-3} &= 5e^{-3} \end{aligned}$$

Damit folgen die beiden Extrempunkte $E_1(0|-1)$ und $E_2(3|5e^{-3})$.

Den Abstand der beiden Extrempunkte können wir mit dem Satz des Pythagoras berechnen. Die Bewegungen entlang der Achsen ergeben die Katheten und die direkte Verbindung die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks. Für den Abstand folgt dann:

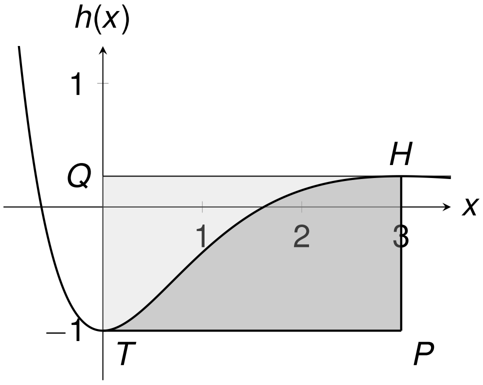
Abstand von Punkten

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\ &= \sqrt{(3 - 0)^2 + (5e^{-3} - (-1))^2} \\ &\approx 3{,}25 \text{ LE} \end{aligned}$$

(3) Wir bestimmen zunächst die Fläche des Rechtecks mit der Formel $A = a \cdot b$, wobei a und b die Seitenlängen des Rechtecks beschreiben. Da die beiden Extrempunkte T und H aus der b) (2) zwei gegenüberliegende Eckpunkte

[2] mit der hinreichenden Bedingung $f''(x) \neq 0$

beschreiben, sind die Seitenlängen, wie in der Teilaufgabe davor im Dreieck, die Abstände entlang der Achsen.



Es folgt:

$$\begin{aligned} A &= \overbrace{(3-0)}^{=a} \cdot \overbrace{(5e^{-3}-(-1))}^{=b} \\ &= 15e^{-3}+3 \\ &\approx 3{,}75 \text{ FE} \end{aligned}$$

Die dunkelgraue Fläche lässt sich mit Hilfe der Integralrechnung bestimmen. Die Fläche wird begrenzt durch die Funktion h, die Gerade $x = 3$ (rechte Integrationsgrenze) und der Geraden $y = -1$.
Mit Hilfe des Taschenrechners erhalten wir somit:

Fläche zwischen Funktionen

$$\int_0^3 (h(x) - (-1))\, \mathrm{d}x = 3 - 12e^{-3} \approx 2{,}40 \text{ FE}$$

Um letztendlich auf den Anteil zu kommen, bestimmen wir den Quotienten aus Teilfläche zur Fläche des Rechtecks:

$$\frac{3-12e^{-3}}{15e^{-3}+3} \approx 0{,}641$$

Die graue Fläche nimmt einen Anteil von etwa 64,1% an der Rechteckfläche ein.

c) (1) Die Funktion w gibt die momentane Durchflussrate in Kubikmetern pro Sekunde an. x ist die vergangene Zeit in Sekunden nach Beobachtungsbeginn. Wenn die Zeit jetzt unendlich groß wird (also $x \to \infty$) verläuft die Exponentialfunktion (e^{-x}) schneller gegen Null als die Polynomfunktion ($4 \cdot (x^2 - x - 1)$) gegen unendlich:

$$\lim_{x\to\infty} \underbrace{\underbrace{4 \cdot (x^2 - x - 1)}_{\to\infty} \cdot \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}}_{\to 0} + 4 \to 0$$

Die momentane Durchflussrate nähert sich langfristig $c = 4\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$ an.

(2) Die mittlere Änderungsrate der Funktion w im Intervall $[0; 10]$ entspricht der Steigung durch die beiden Punkte $P_0(0|w(0))$ und $P_{10}(10|w(10))$:

mittlere Änderungsrate

$$m = \frac{w(10) - w(0)}{10 - 0}$$

Diesen Ausdruck setzen wir gleich mit der Ableitungsfunktion

$$\begin{aligned} w'(x) &= 4 \cdot (x^2 - x - 1) \cdot e^{-x} \cdot (-1) + 4 \cdot (2x - x) \cdot e^{-x} \\ &= -4 \cdot (x^2 - x - 1 - 2x + x) \cdot e^{-x} \\ &= -4 \cdot (x^2 - 2x - 1) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

und bestimmen die Lösungen mit Hilfe des Taschenrechners:

$$w'(x) \stackrel{!}{=} \frac{w(10) - w(0)}{10 - 0} \Leftrightarrow x \approx 0{,}04 \vee x \approx 2{,}51$$

Nach etwa 0,04 bzw. 2,551 Sekunden nach Beobachtungsbeginn entspricht die Steigung der durchschnittlichen Änderungsrate im Intervall [0; 10].

(3) Die stärkste Abnahme der Funktion w in den ersten 10 Sekunden nach Beobachtungsbeginn, entspricht dem Minimum der Ableitungsfunktion (= Wendestelle) in dem Intervall [0; 10]. Bei dieser Aufgabe müssen wir keine Berechnung vornehmen und können anhand der Abbildung 2 argumentieren.

Der graphischen Analyse der Ableitungsfunktion entnehmen wir, dass die stärkste Abnahme ungefähr 4,3 Sekunden nach Beobachtungsbeginn auftritt. Diesen Wert setzen wir in die ursprüngliche Funktion ein, um die momentane Durchflussrate zu diesem Zeitpunkt zu bestimmen:

$$w(4{,}3) \approx 4{,}72$$

Die momentane Durchflussrate für denjenigen Zeitpunkt in den ersten zehn Sekunden nach Beobachtungsbeginn, zu dem sie am stärksten abnimmt, beträgt etwa $4{,}72\,\frac{\text{m}^3}{\text{s}}$.

(4) (i) Die gesamte Wassermenge lässt sich mit Hilfe des Integrals bestimmen. Da die gesamte Wassermenge der ersten zwei Sekunden nach Beobachtungsbeginn bestimmt werden soll, bestimmen wir das Integral mit den Grenzen 0 und 2. Die Berechnung erfolgt mit Hilfe des Taschenrechners:

Funktionen im Sachzusammenhang

$$\int_0^2 w(x)\,\mathrm{d}x = 8 - 24e^{-2} \approx 4{,}75$$

In den ersten zwei Sekunden nach Beobachtungsbeginn fließen etwa $4{,}75\,\text{m}^3$ Wasser an der Messstelle vorbei.

(ii) Wir suchen ein Intervall $[t; t + 3]$, was einen Zeitraum von 3 Sekunden beschreibt und für dass das Integral den Wert 13 ergibt. Der Taschenrechner liefert die möglichen Werte:

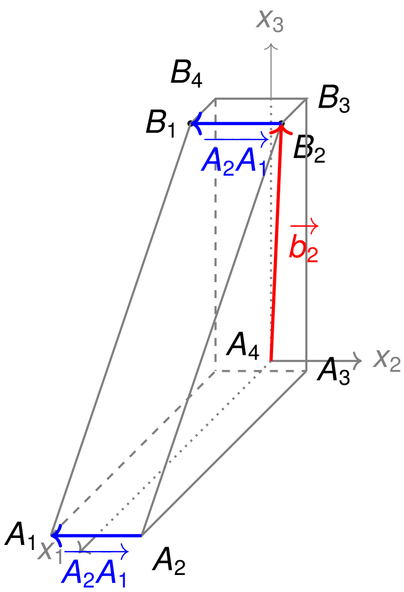
$$\int_t^{t+3} w(x)\,\mathrm{d}x = 13 \Leftrightarrow t \approx -1{,}25 \vee t \approx 0{,}82 \vee t \approx 4{,}43$$

Der erste Wert ist negativ und ist somit nicht Teil der Definitionsmenge. Somit erhalten wir die beiden Zeiträume [0,82; 3,82] und [4,43; 7,43].

Geometrie

Lösung:

a) (1) Da die Vierecke $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$ Rechtecke sind und die Vierecke $A_2A_3B_3B_2$ und $A_1A_4B_4B_1$ parallel zur x_1x_3-Ebene liegen, muss das Viereck $A_1A_2B_2B_1$ ebenfalls ein Rechteck sein.



Da in einem Rechteck gegenüberliegende Seiten gleichlang und parallel sind, erhalten wir B_1, indem wir von B_2 in Richtung $\overrightarrow{A_2A_1}$ gehen:

$$\vec{b}_1 = \vec{b}_2 + \overrightarrow{A_2A_1}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ -5 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Der gesuchte Punkt ist $B_1(10|-5|30)$.

(2) Ein Trapez ist ein Viereck, bei dem zwei Seiten parallel verlaufen. Aus dem Schaubild können wir erkennen, dass $\overline{A_2A_3}$ und $\overline{B_2B_3}$ parallel sein müssen. Diese Annahme können wir rechnerisch prüfen, indem wir die Vektoren entlang der Seitenkanten bestimmen:

lineare Abhängigkeit

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{75}}{3} - 50 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{B_2B_3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{75}}{3} - 10 \right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Da die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind, verlaufen sie parallel zueinander.

Das Volumen eines Körpers errechnet sich allgemein durch eine Grundseite multipliziert mit der Höhe. In diesem Fall bietet es sich an, als Grundfläche die Seitenfläche zu nehmen, die dem Flächeninhalt eines Trapezes entspricht. Die Fläche eines Trapezes mit den Grundseiten (= parallelen Seiten) a und c sowie der Höhe h berechnet sich nach der Formel

$$A = \frac{1}{2} \cdot (a + c) \cdot h$$

Die Längen der Seitenkanten können wir aus der vorherigen Berechnung ablesen, da wir die Seitenkanten über ein Vielfaches eines Einheitsvektors dargestellt haben. Damit ist die Länge gleich dem Betrag des Vorfaktors aus der vorherigen Berechnung:

$$a = 50 - \frac{\sqrt{75}}{3} \quad \text{und} \quad b = 10 - \frac{\sqrt{75}}{3}$$

Die Höhe ist genau der Höhenunterschied zwischen den beiden Rechtecken $A_1A_2A_3A_4$ und $B_1B_2B_3B_4$. Dieser entspricht der Länge der Strecke $\overline{A_3B_3} = 30$ LE. Daraus folgt der Flächeninhalt:

Länge eines Vektors

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \cdot \left(\left(50 - \frac{\sqrt{75}}{3} \right) + \left(10 - \frac{\sqrt{75}}{3} \right) \right) \cdot 30 \\ &= \left(30 - \frac{\sqrt{75}}{3} \right) \cdot 30 \approx 813{,}397 \text{ FE} \end{aligned}$$

Der Körper K ist ein Prisma mit einem Trapez als Grundfläche. Die Grundfläche haben wir soeben berechnet und die Höhe des Prismas entspricht der Länge der Strecke $\overline{A_2A_1} = 10$ LE. Somit hat der Körper K das Volumen:

$$V_K = 813{,}397 \cdot 10 = 8133{,}97 \text{ VE}$$

(3) Der Winkel zwischen zwei Vektoren berechnet sich über:

Winkel zwischen Vektoren

$$\varphi = \cos^{-1} \left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right)$$

Wir bestimmen also die beiden Vektoren entlang der Seitenkanten

$$\overrightarrow{A_2A_3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{A_2B_2} = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}$$

und die zugehörigen Längen:

$$|\overrightarrow{A_2A_3}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{75}}{3}-50\right)^2} = \frac{\sqrt{75}}{3}-50$$
$$|\overrightarrow{A_2B_2}| = \sqrt{(-40)^2+30^2} = 50$$

Einsetzen in die Formel liefert den gesuchten Winkel:

$$\cos(\varphi) = \frac{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{75}}{3}-50\\0\\0\end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix}-40\\0\\30\end{pmatrix}}{(\frac{\sqrt{75}}{3}-50)\cdot 50} \Leftrightarrow \varphi \approx 36{,}87^\circ$$

b) (1) Wir sollen den Mittelpunkt des Dreiecks berechnen. Wir wissen, dass das Dreieck gleichseitig ist und daher verlaufen die Symmetrieachsen jeweils durch die Mitte einer Seitenkante und durch den gegenüberliegenden Punkt. Die Symmetrieachse durch die Kante $\overline{A_3A_4}$ entspricht der x_1-Achse. Der Mittelpunkt der Kante $\overline{A_3A_4}$ ist der Punkt $M(\frac{\sqrt{75}}{3}|0|0)$. Damit erhalten wir eine Gerade, welche diese Symmetrieachse beschreibt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{75}}{3}\\0\\0\end{pmatrix} + v\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}\ ;\ v\in\mathbb{R}$$

Der Richtungsvektor ist negativ in x_1-Richtung, da wir vom Mittelpunkt der Strecke in die entgegengesetzte Richtung der x_1-Achse laufen. Jetzt müssen wir noch in Erfahrung bringen, wie weit wir diese Gerade „entlang gehen" müssen, um zum Punkt P zu kommen. Dafür bestimmen wir zunächst die Höhe des Dreiecks, welche sich um gleichseitigen Dreieck durch

$$h = \frac{a}{2}\cdot\sqrt{3}$$

berechnet. Die Größe a entspricht dabei der Länge einer Seitenkante, also der Länge der Strecke $\overline{A_3A_4}$. Dies ist aber auch gleich der Länge $\overline{A_1A_2}$ (die wir bereits berechnet haben), da das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ ein Rechteck ist. Also ist $a = 10$ und daraus folgt für die Höhe:

$$h = \frac{10}{2}\cdot\sqrt{3} = 5\cdot\sqrt{3} = \sqrt{75}$$

Nun können wir die Höhe gleich dem Parameter in der Geraden entlang der Symmetrieachse setzen und erhalten den Punkt P:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{75}}{3}\\0\\0\end{pmatrix} + \sqrt{75}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{2\sqrt{75}}{3}\\0\\0\end{pmatrix}$$

Der Punkt P hat somit die Koordinaten $(-\frac{2\sqrt{75}}{3}|0|0)$.

(2) Diese Aufgabe ist sehr einfach, da wir nur den Betrag eines Vektors berechnen müssen. Der Abstand von A_4 zum Ursprung entspricht nämlich der Länge des Vektors $\vec{a}_4$:

$$|\vec{a}_4| = \left|\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\right)^2 + (-5)^2} = \sqrt{\frac{300}{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ LE}$$

Der Abstand von A_4 zum Ursprung beträgt somit ca. 5,774 LE.

c) 1) Wenn wir uns die Ebenengleichung anschauen, fällt sofort auf, dass der Punkt A_1 als Ortsvektor verwendet wurde. Die beiden Richtungsvektoren (= Spannvektoren) lassen sich wie folgt ermitteln:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und } \overrightarrow{A_1B_2} = \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$$

Also befinden sich die Punkte A_2 und B_2 ebenfalls in der Ebene. Den Punkt B_1 erreichen wir über $\vec{b}_2 + \overrightarrow{A_2A_1}$ und somit muss dieser Punkt ebenfalls Teil der Ebene sein.

Damit haben wir gezeigt, dass alle vier Punkte innerhalb der Ebene (und die Fläche $A_1A_2B_2B_1$) liegen.

2) Wir sollen prüfen, ob der Schatten der Mastspitze innerhalb der Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt. Dazu muss der Schnittpunkt von der Geraden, die das Licht beschreibt und der Ebene, die die Fläche beschreibt, innerhalb der beschriebenen Parameterbereiche liegen.

Die Geradengleichung des Lichts können wir direkt aufstellen, da wir den Stützvektor S und den Richtungsvektor gegeben haben:

$$l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}; \ k \in \mathbb{R}$$

In c) (1) haben wir die Ebenengleichung in Parameterform vorliegen. Für einen Schnittpunkt können wir die Parameterformen gleichsetzen oder wir geben die Ebenengleichung in Koordinatenform an. Das ist oft der schnellere Weg. Mit dem Normalenvektor

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -40 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = 100 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{n} \bullet \vec{x} = \vec{n} \bullet \vec{p}$$

folgt die Ebenengleichung

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 3x_1 + 4x_3 = 150$$

und jetzt setzen wir die Gerade in die Ebene ein:

$$\begin{array}{rrcll} & 3 \cdot 6k + 4 \cdot (35 - 2k) & = & 150 & \\ \Leftrightarrow & 10k + 140 & = & 150 & \mid -140 \\ \Leftrightarrow & 10k & = & 10 & \mid \div 10 \\ \Leftrightarrow & k & = & 1 & \end{array}$$

Schnittpunkt Gerade und Ebene

Den Schnittpunkt erhalten wir, indem der Parameter in die Gerade eingesetzt wird:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Da der Schnittpunkt $S(6|0|33)$ eine größere x_3-Koordinate besitzt als die höchsten Punkte der Fläche (z.B. B_3 mit $x_3 = 30$), kann der Schatten nicht innerhalb der Fläche liegen.

Stochastik

Lösung:

Baum-
diagramm

a) (1) Wir definieren uns zunächst geeignete Abkürzungen:

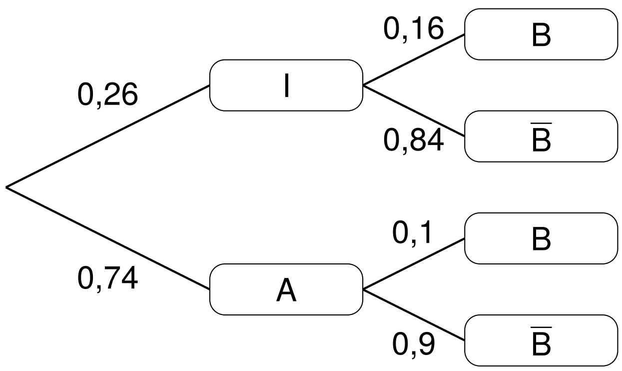
I: Inlandsreisen

A: Auslandsreisen

B: Anreise mit der Bahn

$\overline{B}$: Anreise ohne Bahn

Mit Hilfe der Informationen im Text können wir dann das Baumdiagramm zeichnen. Da 26% der Reisen ins Inland gingen, müssen 100% − 26% = 74% der Reisen ins Auslagen gegangen sein. Die anderen Wahrscheinlichkeiten werden analog ermittelt:



Satz von
Bayes

(2) Wenn wir eine Wahrscheinlichkeit berechnen sollen, bei dem eine Information bereits gegeben ist, ist die bedingte Wahrscheinlichkeit gesucht. Wir wissen, dass die Bahn genutzt wurde und suchen nun die Wahrscheinlichkeit, dass es sich dabei um eine Inlandsreise handelte. Mit dem Satz von Bayes und den Einzelwahrscheinlichkeiten aus dem Baumdiagramm folgt:

$$P_B(I) = \frac{P(B \cap I)}{P(B)} = \frac{P(I) \cdot P_I(B)}{P(I) \cdot P_I(B) + P(A) \cdot P_A(B)}$$

$$= \frac{0{,}26 \cdot 0{,}16}{0{,}26 \cdot 0{,}16 + 0{,}74 \cdot 0{,}1}$$

$$\approx 0{,}3599$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Bahn zur Anreise genommen wurde und es sich um eine Inlandsreise handelte, liegt bei 35,99%.

b) (1) Es wird nur noch nach „Inlandsreise“ und „Auslandsreise“ unterscheiden, wodurch es nur zwei verschiedene Ergebnisse gibt. Wegen des im Vergleich zur Grundgesamtheit (10 000) kleinen Strichprobenumfangs (20) ist die Wahrscheinlichkeit für eine Inlandsreise nahezu konstant. Daher kann für $0 \leq k \leq 20$ zur Berechnung von $P(X = k)$ in guter Näherung eine Binomialverteilung verwendet werden.

Die Auswahl der 20 Fragebögen aus den 10 000 befragten Personen entspricht dem Ziehen ohne Zurücklegen. Daher ändert sich streng genommen die Wahrscheinlichkeit von Zug zu Zug. Jedoch ist die Grundgesamtheit von 10 000 so hoch, dass sich diese Veränderung fast nicht bemerkbar macht.

(2) Die Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl der Inlandsreisen unter den 20 Urlaubsreisen. Sie ist binomialverteilt mit $n = 20$ und $p = 0{,}26$. Mit Hilfe des Taschenrechners folgt:

$$P_{20;0,26}(X \geq 6) \approx 0{,}4235 = 42{,}35\%$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass von den 20 Urlaubsreisen mindestens sechs Inlandsreisen sind, beträgt 42,35%.

(3) Um das zu betrachtende Intervall zu bestimmen, benötigen wir zunächst den Erwartungswert und die Standardabweichung:

$$\mu = 20 \cdot 0{,}26 = 5{,}2$$
$$\text{und} \quad \sigma = \sqrt{20 \cdot 0{,}26 \cdot 0{,}74} \approx 1{,}962$$

Daraus folgt das Intervall $[\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma] \approx [2; 9]$. Im Sachzusammenhang machen natürlich nur ganzzahlige Werte Sinn, so dass wir hier auf ganzzahlige Werte runden. Der Taschenrechner liefert uns die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$P_{20;0,26}(2 \leq X \leq 9) \approx 0{,}9622 = 96{,}22\%$$

c) Wir definieren eine neue Zufallsvariable Y, die beschreibt, auf wie vielen Fragebögen eine Auslandsreise angegeben wurde. Y wird als binomialverteilt mit unbekanntem n und einer Wahrscheinlichkeit von 0,74 für eine Auslandsreise angenommen. Gesucht ist der kleinste Wert n, sodass gilt:

Binomialverteilung

$$P_{n;0,74}(Y \geq 5) \geq 0{,}99 \quad ?$$

Die Bestimmung von n erfolgt durch systematisches Probieren:

$$\begin{aligned} P_{9;0,74}(Y \geq 5) &\approx 0{,}9429 < 0{,}99 \\ P_{10;0,74}(Y \geq 5) &\approx 0{,}9761 < 0{,}99 \\ P_{11;0,74}(Y \geq 5) &\approx 0{,}9905 > 0{,}99 \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich, dass mindestens 11 Fragebögen ausgewählt werden müssen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% fünf Fragebögen zu erhalten, auf denen eine Auslandsreise angegeben wurde.

d) (1) Die Zufallsvariable Z gibt die Anzahl der Inlandsreisen für das Jahr 2022 an. Sie ist binomialverteilt mit $n = 100$ und $p = 0{,}26$. Hier hat sich also nichts geändert.

Die betrachtete Stichprobe soll nun 34 oder mehr Inlandsreisen enthalten. Die Wahrscheinlichkeit dafür, liefert der Taschenrechner:

$$P_{100;0,26}(Z \geq 34) \approx 0{,}0465 = 4{,}65\%$$

Somit beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass das Team sich irrt, bei 4,65%.

(2) Es gilt nun $p = 0{,}3$ und $n = 100$.

Da das Team von einer unveränderten Anzahl von Inlandsreisen ausgeht, sind in der Stichprobe höchstens 33 Inlandsreisen enthalten. Es ist also zu berechnen:

$$P_{100;0,3}(Z \leq 33) \approx 0{,}7793 = 77{,}93\%$$