Mathe Abi Klausurenheft – NRW (Leistungskurs)

Prüfungsjahr 2023

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Christian Strack
Konzept & Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

Neu ab dem Prüfungsjahr 2024:
Für Prüfungsteil A (hilfsmittelfrei zu bearbeitende Aufgaben) wird eine begrenzte Aufgabenauswahl durch die Prüflinge eingeführt. Hierdurch verlängert sich die Arbeitszeit insgesamt um 30 Minuten (inkl. Auswahlzeit). Die Struktur der Aufgaben im Zentralabitur Mathematik ab 2024 bleibt unverändert.

1 Abi Klausur 2023 – Leistungskurs

1.1 Aufgaben

1.1.1 Prüfungsteil A

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: max. 70 Minuten
- Hinweis: Die Aufgaben sind nicht direkt einem Thema zugewiesen, wie es die folgende Tabelle vermuten lässt.
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Analysis	a)	(1)	4	
		(2)	1	
	b)	(1)	2	
		(2)	3	
	c)	(1)	2	
		(2)	3	
	d)	(1)	2	
		(2)	3	
Vektorielle Geometrie	d)	(1)	3	
		(2)	2	
Stochastik	e)	(1)	3	
		(2)	2	

Aufgabenstellung:

a) Gegeben sind die Funktionen f und g mit

$$f(x) = \frac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \frac{3}{2}x + 5, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(x) = -3x + 5, \quad x \in \mathbb{R}$$

(1) Berechnen Sie die Stellen, an denen die Graphen von f und g gemeinsame Punkte besitzen.

(2) Der Punkt $P(3|f(3))$ ist einer dieser gemeinsamen Punkte.
Zeigen Sie: Der Graph von g ist die Tangente an den Graphen von f im Punkt P.

---

b) Betrachtet wird die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = e^{(x^2)}$.

(1) Geben Sie die Wertemenge von f an.

[Die Wertemenge von f umfasst alle Zahlen, die als Funktionswerte von f auftreten.]

(2) Für die erste Ableitungsfunktion f' von f gilt $f'(x) = 2x \cdot f(x)$.
Die Graphen von f und f' schneiden sich in einem Punkt.
Bestimmen Sie die Steigung des Graphen von f in diesem Punkt.

---

c) Eine in $\mathbb{R}$ definierte ganzrationale, nicht lineare Funktion f mit erster Ableitungsfunktion f' und zweiter Ableitungsfunktion f'' hat folgende Eigenschaften:

- f hat bei x_1 eine Nullstelle.
- Es gilt $f'(x_2) = 0$ und $f''(x_2) \neq 0$.
- f' hat ein lokales Minimum an der Stelle x_3.

Abbildung 1 zeigt die Positionen von x_1, x_2 und x_3.

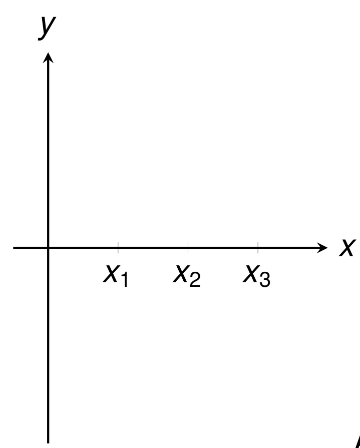


Abb. 1

(1) Begründen Sie, dass der Grad von f mindestens 3 ist.

(2) Skizzieren Sie in Abbildung 1 einen möglichen Graphen von f.

d) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion $f : x \mapsto -x^2 + 2ax$ mit $a \in \mathbb{R}$ und $a > 1$. Die Nullstellen von f sind 0 und $2a$.

(1) Zeigen Sie, dass das Flächenstück, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt, den Inhalt $\frac{4}{3}a^3$ hat.

(2) Der Hochpunkt des Graphen von f liegt auf einer Seite eines Quadrats; zwei Seiten dieses Quadrats liegen auf den Koordinatenachsen (vgl. Abbildung 2).

Der Flächeninhalt des Quadrats stimmt mit dem Inhalt des Flächenstücks, das der Graph von f mit der x-Achse einschließt überein.

Bestimmen Sie den Wert von a.

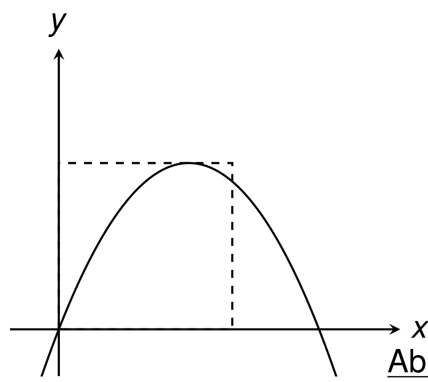


Abb. 2

---

e) (1) Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{I} & 2x & & & + & z & = & 0 \\ \text{II} & & - & 2y & + & 4z & = & 0 \quad \text{mit } x, y, z \in \mathbb{R}. \\ \text{III} & & & 2y & - & 5z & = & 1 \end{array}$$

Berechnen Sie die Lösung des Gleichungssystems.

(2) Es gibt einen Wert von r mit $r \in \mathbb{R}$, für den das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rrcrcrcl} \text{I} & 2x & & & + & z & = & 0 \\ \text{II} & & - & 2y & + & 4z & = & 0 \quad \text{mit } x, y, z \in \mathbb{R} \\ \text{III} & & & 2y & - & r \cdot z & = & 1 \end{array}$$

keine Lösung besitzt. Ermitteln Sie diesen Wert

---

f) (1) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und p. Für den Erwartungswert μ und die Standardabweichung σ von X gilt: $\mu = 60$ und $\sigma = 6$. Berechnen Sie p und n.

(2) In einer Urne befinden sich 4 schwarze und 6 weiße Kugeln. Aus der Urne wird mit Zurücklegen 150-mal eine Kugel gezogen.

(i) Geben Sie einen Term für die Wahrscheinlichkeit an, dass dabei genau 60-mal eine schwarze Kugel gezogen wird.

(ii) Beschreiben Sie ein Ereignis mit einer Wahrscheinlichkeit von

$$0{,}4^5 \cdot \binom{145}{55} \cdot 0{,}4^{55} \cdot 0{,}6^{90}$$

1.1.2 Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **Hilfsmittel** (GTR, Mathematische Formelsammlung, Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung) verwendet werden.

- Arbeitszeit: mind. 200 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Analysis	a)	(1)	3	
		(2)	2	
		(3)	2	
		(4)	6	
	b)	(1)	4	
		(2)	4	
	c)	(1)	2	
		(2)	7	
		(3)	4	
		(4)	4	
		(5)	2	
Vektorielle Geometrie	a)	(1)	1	
		(2)	3	
		(3)	3	
		(4)	1	
	b)	(1)	3	
		(2)	3	
		(3)	4	
	c)	(1)	1	
		(2)	4	
		(3)	2	
Stochastik	a)	(1)	2	
		(2)	3	
	b)	(1)	2	
		(2)	3	
	c)	(1)	2	
		(2)	2	
	d)	(1)	3	
		(2)	2	
	e)	(1)	2	
		(2)	4	

Analysis

Aufgabenstellung:

Die Funktion f ist gegeben durch die Gleichung $f(x) = (x^3 - 5) \cdot e^x,\ x \in \mathbb{R}$.
Der Graph von f ist in Abbildung 1 dargestellt.

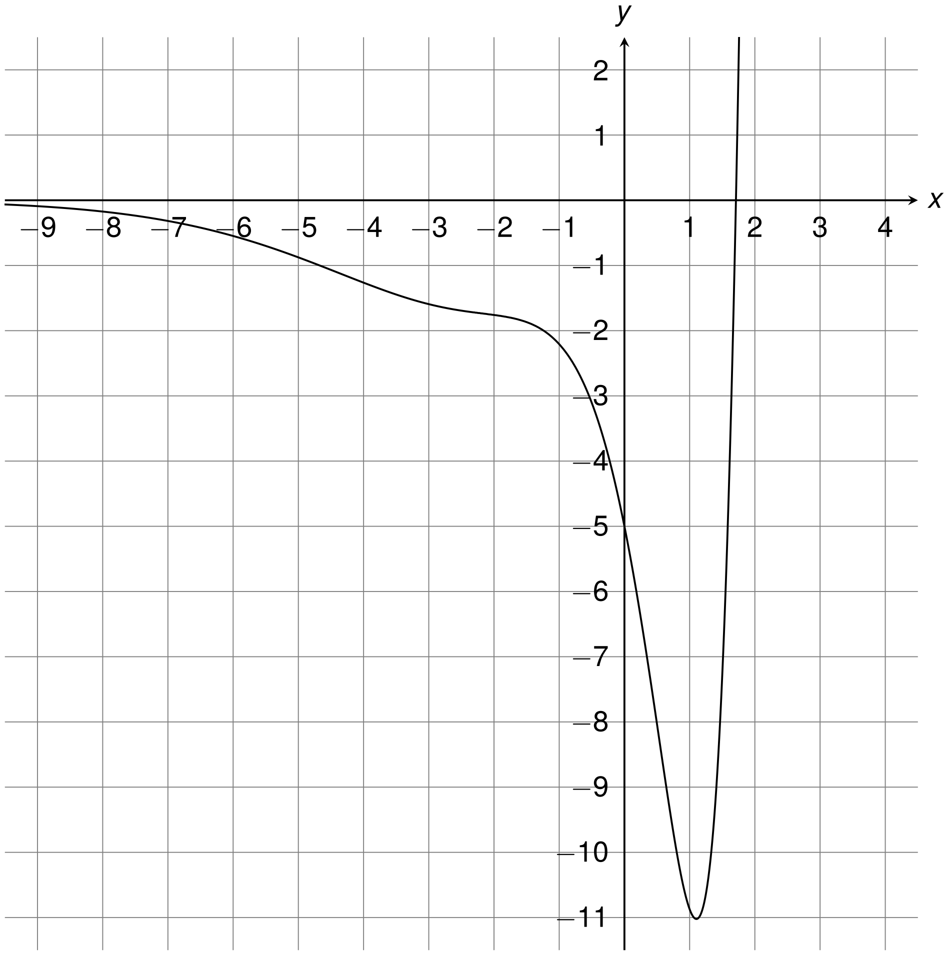


Abb. 1

a) (1) Berechnen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Punkt $P(-1|f(-1))$, ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden.

Der Graph von f besitzt genau eine Extremstelle und drei Wendestellen.

(2) Berechnen Sie die Wendestellen der Funktion f auf drei Nachkommastellen gerundet.

Für $z > 0$ ist $P_z(z|f(z))$ ein Punkt auf dem Graphen von f. Er bildet zusammen mit dem Ursprung $O(0|0)$ und dem Punkt $Q_z(z|0)$ ein Dreieck OP_zQ_z.

(3) Bestimmen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks OP_zQ_z, wenn für P_z der Tiefpunkt des Graphen von f gewählt wird.

b) (1) Zwischen dem Graphen der Funktion f und der x-Achse liegt im 3. und 4. Quadranten eine Fläche mit endlichem Flächeninhalt, die nach links unendlich ausgedehnt ist. Diese Fläche ist in Abbildung 2 grau dargestellt.

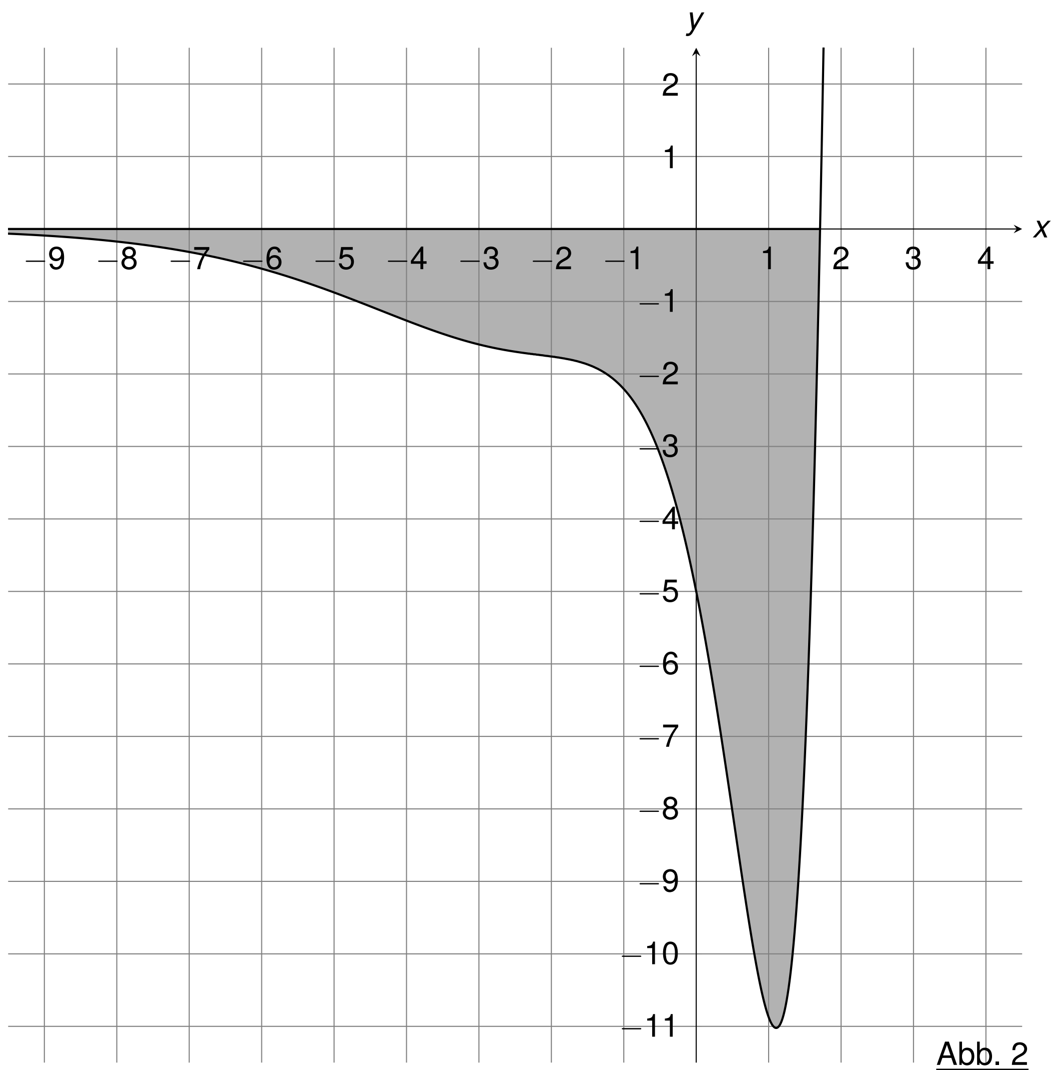


Abb. 2

(i) Bestimmen Sie den Inhalt dieser Fläche gerundet auf drei Nachkommastellen.

(ii) Die y-Achse teilt diese Fläche in zwei Teilflächen.
Ermitteln Sie das Verhältnis der zugehörigen Flächeninhalte.

(2) Für $z \neq 0$ hat die Gleichung

$$\int_0^z f(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

genau eine Lösung. Bestimmen Sie diese Lösung und interpretieren Sie die Lösung geometrisch.

(3) Die Punkte $O(0|0), N(-5|0), Y(0|-5)$ bilden ein Dreieck ONY. Der Graph der Funktion f verläuft teilweise innerhalb des Dreiecks und schließt mit der Seite $\overline{NY}$ eine Fläche A ein.

(i) Zeichnen Sie die Fläche A in Abbildung 3 ein.

[Abbildung 3 ist identisch mit Abbildung 1.]

(ii) Bestimmen Sie den Flächeninhalt der Fläche A.

(iii) Ermitteln Sie die beiden Punkte auf dem Graphen von f, in denen die Tangente parallel zur Seite $\overline{NY}$ verläuft.

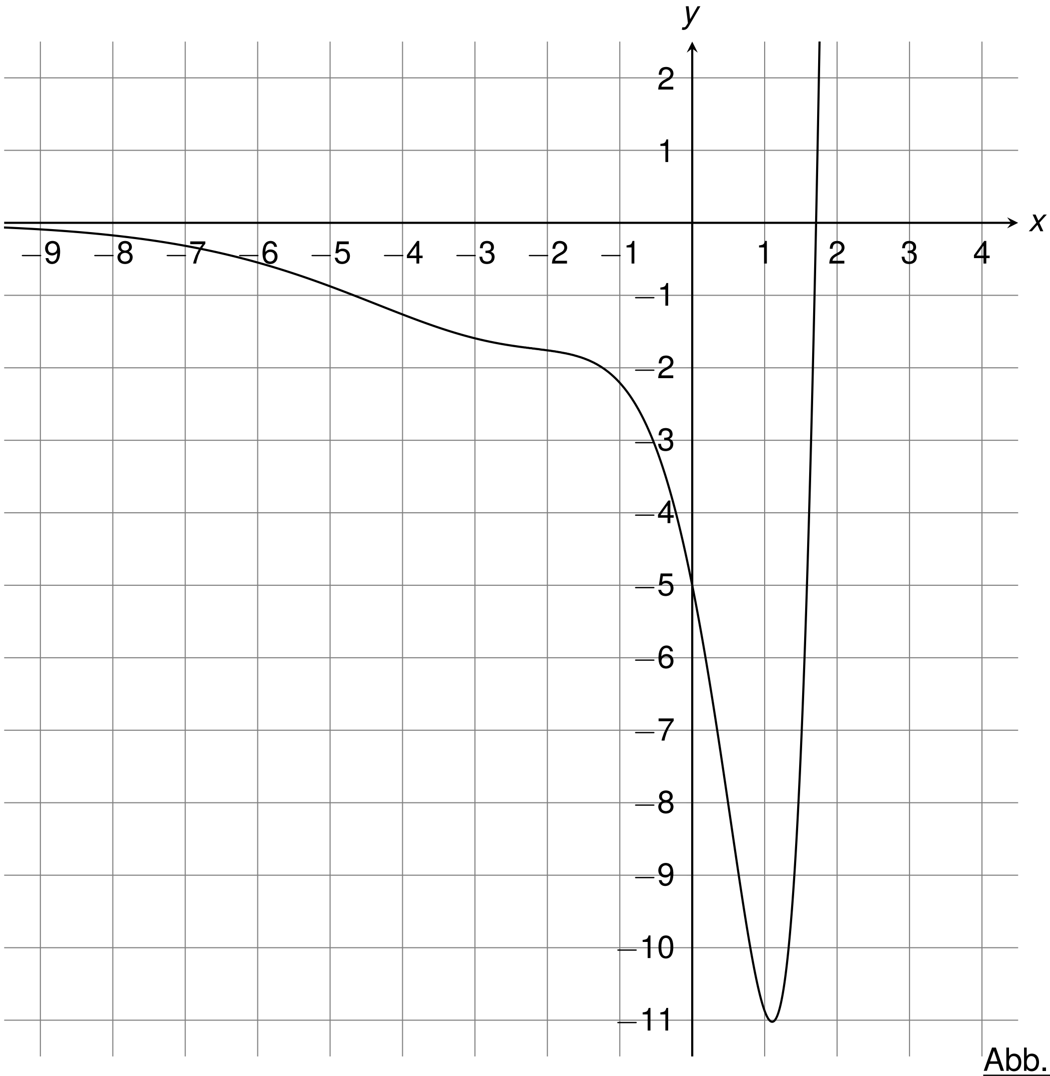


Abb. 3

c) Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_k durch die Funktionsgleichung

$$f_k(x) = (x^3 + k) \cdot e^x \text{ mit } k \in \mathbb{R}.$$

Die Funktion f_{-5} stimmt mit der Funktion f überein.
Die folgende Abbildung 4 zeigt drei Graphen der Schar G_I, G_{II}, G_{III} für drei verschiedene Parameter k_I, k_{II}, k_{III}.

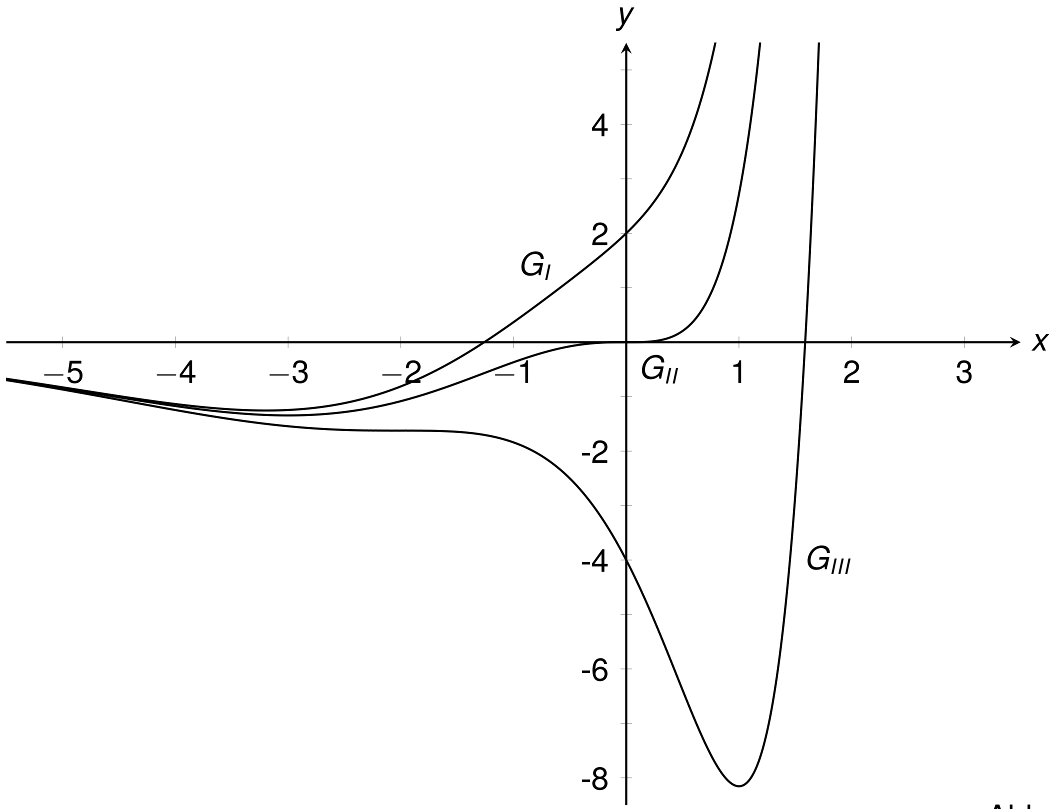


Abb. 4

(1) Geben Sie die zugehörigen Parameter an.

(2) Begründen Sie, dass jede Funktion f_k der Schar genau eine Nullstelle hat.

Für die Ableitungsfunktion f_k' gilt: $f_k'(x) = (x^3 + 3x^2 + k) \cdot e^x, \quad x \in \mathbb{R};\ k \in \mathbb{R}.$

(3) Um die Abhängigkeit der Anzahl der Extremstellen der Funktion f_k vom Parameter k näher zu betrachten, wird die Funktion h_k mit $h_k(x) = x^3 + 3x^2 + k$ auf Nullstellen untersucht. Abbildung 5 zeigt den Graphen der Funktion h_0 (also $k = 0$).

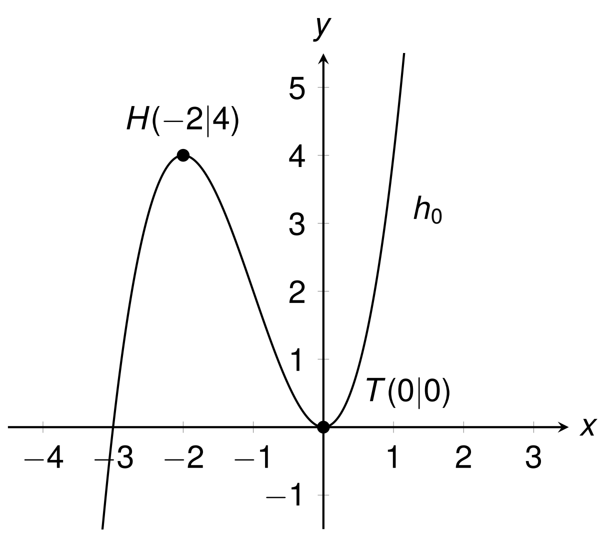


Abb. 5

(i) Geben Sie anhand von Abbildung 5 die Anzahl der Nullstellen der Funktion h_k in Abhängigkeit vom Parameter k an.

[Von einer Berechnung der Nullstellen im Taschenrechner ist abzusehen.]

(ii) Begründen Sie die Richtigkeit der folgenden drei Aussagen:

S1: Für jedes $k > 0$ hat die Funktion f_k genau eine Extremstelle.
S2: Es gibt keine Funktion f_k, die mehr als drei Extremstellen hat.
S3: Es gibt keine Funktion f_k, die genau zwei Extremstellen hat.

Geometrie

Aufgabenstellung:

Der in Abbildung 1 dargestellte Körper K mit den Eckpunkten

$$A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3 \text{ und } B_4$$

hat folgende Eigenschaften:

$A_1A_2A_3A_4$ ist ein Rechteck in der x_1x_2-Ebene, $B_1B_2B_3B_4$ ist ein Rechteck in einer zur x_1x_2-Ebene parallelen Ebene. Die Vierecke $A_2A_3B_3B_2$ und $A_1A_4B_4B_1$ liegen in Ebenen, die parallel zur x_1x_3-Ebene verlaufen.

Sechs der Eckpunkte sind gegeben durch:

$A_1(50|-5|0)$

$A_2(50|5|0)$

$A_3\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\middle|5\middle|0\right)$

$A_4\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\middle|-5\middle|0\right)$

$B_2(10|5|30)$

$B_3\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\middle|5\middle|30\right)$

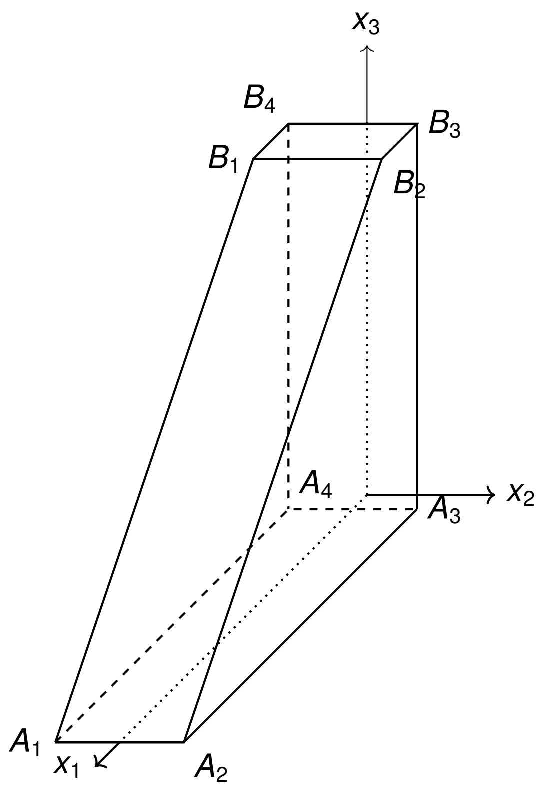


Abb. 1

a) (1) Geben Sie die Koordinaten des Punktes B_1 an.

(2) Begründen Sie, dass die Seitenfläche $A_2A_3B_3B_2$ ein Trapez ist, und berechnen Sie das Volumen des Körpers K.

Der Körper K ist Teil eines mathematischen Modells eines Architekturbüros zur Planung eines neuen Hotels. Das Hotel soll zehn Stockwerke gleicher Höhe besitzen. Für die an die Schrägen angrenzenden Hotelzimmer sind von der 1. bis zur 9. Etage Balkone geplant. Als Beispiel ist in Abbildung 2 der Boden des Balkons für die 3. Etage dargestellt. Eine Längeneinheit im Modell entspricht einem Meter in der Realität.

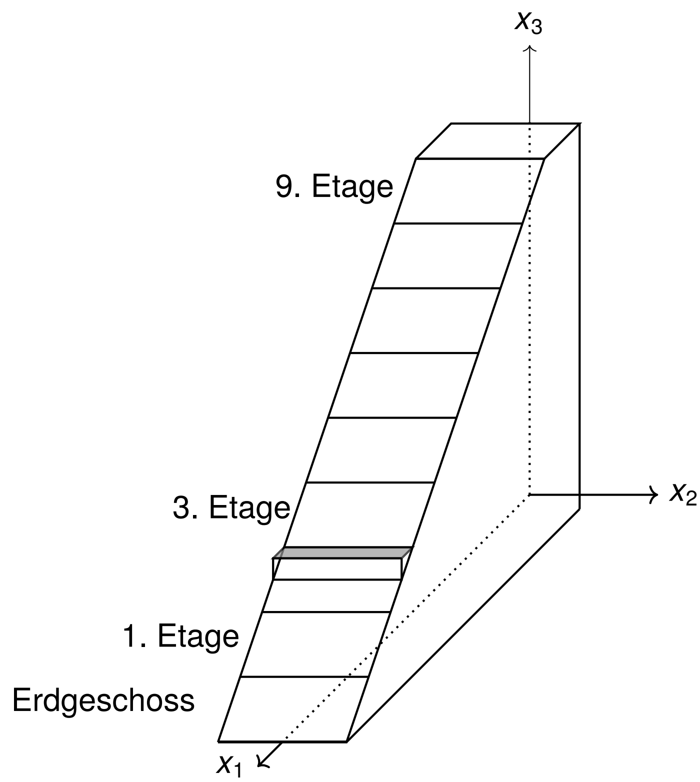


Abb. 2

b) Durch

$$E_a : \vec{x} = \begin{pmatrix} 50 - a \\ 5 \\ 0{,}75 \cdot a \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R},\ r, s \in \mathbb{R}$$

ist eine Schar paralleler Ebenen gegeben. Der Boden jedes Balkons wird im Folgenden als Fläche innerhalb einer geeigneten Ebene der Schar modelliert. Der Boden des Balkons für die 3. Etage liegt z.B. in der Ebene E_{12}.

(1) Zeigen Sie:
Für jeden Wert von a mit $0 \leq a \leq 40$ liegt der Punkt $(50 - a|5|0{,}75 \cdot a)$ auf der Strecke $\overline{A_2B_2}$.

(2) Die Menge aller Punkte der Bodenfläche des Balkons für die 3. Etage wird durch die Parametergleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 38 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq s \leq 3$$

beschrieben.

Der Balkon ist wie in Abbildung 3 dargestellt auf zwei vertikalen Stützen s_1 und s_2 gelagert. Berechnen Sie die Länge der Stütze s_1.

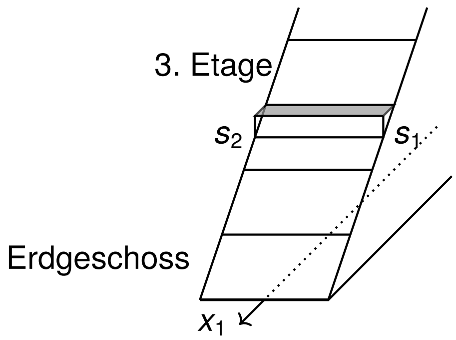


Abb. 3

Das Hotel soll aus drei Gebäuden bestehen, die jeweils die gleiche Form besitzen. Durch den Körper K wird Gebäude *I* modelliert, die Gebäude *II* und *III* sind gegenüber Gebäude *I* jeweils um 120° gedreht (siehe Abbildung 4).

Alle drei Gebäude stehen so aneinander, dass sie einen dreieckigen Innenhof bilden. In der Modellierung liegt dieser Innenhof in der x_1x_2-Ebene.

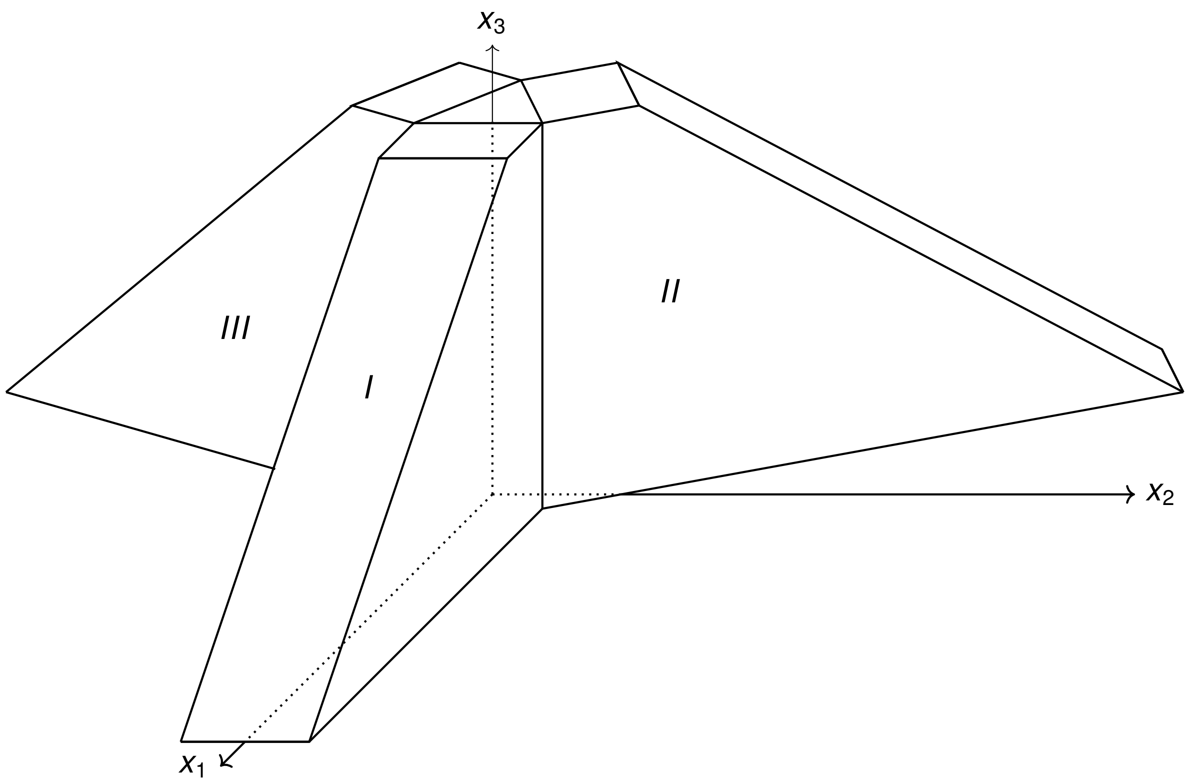


Abb. 4

Die folgende Abbildung 5 zeigt das Modell des Hotels von oben.

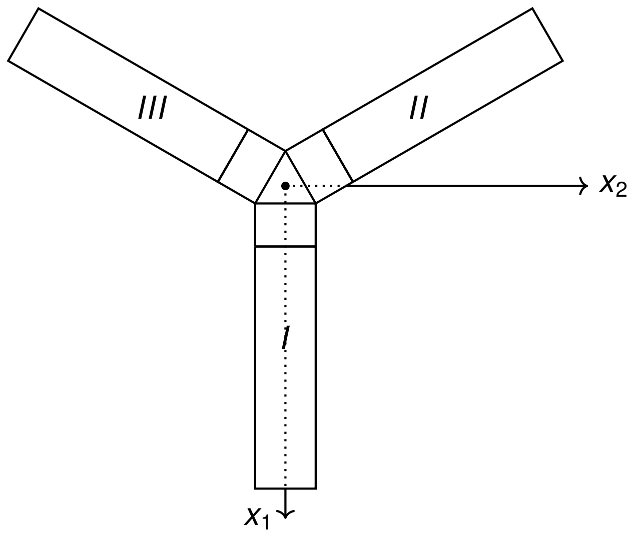


Abb. 5

c) Der Innenhof A_4A_3P hat die Form eines gleichseitigen Dreiecks.

(1) Ermitteln Sie rechnerisch die Koordinaten des Punktes P.

$\left[\text{Zur Kontrolle: } P\left(-\frac{2\cdot\sqrt{75}}{3}\middle|0\middle|0\right) \approx P(-5{,}77|0|0)\right]$

(2) Berechnen Sie den Abstand von A_4 zum Koordinatenursprung $O(0|0|0)$.

d) (1) Stellen Sie eine Koordinatengleichung der Ebene F auf, in der die Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt.

[Zur Kontrolle: $F: 3x_1 + 4x_3 = 150$]

(2) In der Mitte des Innenhofs steht ein Mast, dessen Spitze im Punkt $S(0|0|35)$ liegt. Zu einem bestimmten Zeitpunkt steht die Sonne so, dass die Sonnenstrahlen die Richtung

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

besitzen. Untersuchen Sie, ob der Schatten der Spitze des Masts zu diesem Zeitpunkt innerhalb der Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt.

Stochastik

Aufgabenstellung:

Ein Unternehmen stellt Olivenöl her und füllt es in Flaschen ab. Laut Aufdruck beträgt die Füllmenge jeder Flasche 600 ml.

a) Die Flaschen werden in Kartons verpackt; jeder Karton enthält zwölf Flaschen. Ein Karton gilt als fehlerhaft, wenn mehr als eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält. Für jede Falsche beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie weniger als 600 ml Öl enthält, 1,5%.

(1) Die Rechnung $0{,}985^{12} \approx 83{,}4\%$ stellt im Sachzusammenhang die Lösung einer Aufgabe dar.
Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung und erläutern Sie den Ansatz der Rechnung.

(2) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 Flaschen genau drei Flaschen mit weniger als 600 ml Öl befinden.

(3) Es wird eine Flasche nach der anderen geöffnet und die Füllmenge überprüft.
Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die vierte geöffnete Flasche die erste überprüfte Flasche ist, die weniger als 600 ml Öl enthält.

(4) An einen Supermarkt wird regelmäßig die gleiche Anzahl von Flaschen geliefert. Dabei enthalten im Mittel mehr als 780 Flaschen mindestens 600 ml Öl.
Ermitteln Sie die Anzahl der Flaschen, die eine regelmäßige Lieferung mindestens umfasst.

(5) Ein Supermarkt erhält eine Lieferung von 150 Kartons.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mehr als 3% der Kartons fehlerhaft sind.

b) Die Füllmenge der Flaschen sei normalverteilt mit einem Erwartungswert von 600,5 ml und einer Standardabweichung von 0,23 ml.

(1) Eine Flasche wird zufällig ausgewählt. Ermitteln Sie für die folgenden Ereignisse jeweils die Wahrscheinlichkeit:

A: „Die Flasche enthält mehr als 601 ml Öl.“

B: „Die Füllmenge der Flasche weicht höchstens um 0,5 ml vom Erwartungswert ab.“

(2) Die Füllmenge einer Flasche ist nie negativ. Die Normalverteilung, die zur Beschreibung der Füllmenge der Flaschen verwendet wird, ist jedoch auch für negative reelle Zahlen definiert und nimmt dabei ausschließlich positive Werte an.
Begründen Sie, dass die Verwendung der Normalverteilung dennoch sinnvoll ist.

(3) Das Unternehmen möchte die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine Flasche weniger als 600 ml Öl enthält, verringern. Für die nötige Änderung der Maschine, die die Flaschen befüllt, gibt es zwei Vorschläge:

V 1: „Die eingestellte Füllmenge von 600,5 ml wird erhöht.

V 2: „Die Genauigkeit, mit der die eingestellte Füllmenge von 600,5 ml erreicht wird, wird erhöht.

Die Abbildungen 1 und 2 zeigen jeweils den Graphen der Dichtefunktion, die vor der Änderung der Maschine die Füllmenge der Flaschen beschreibt.

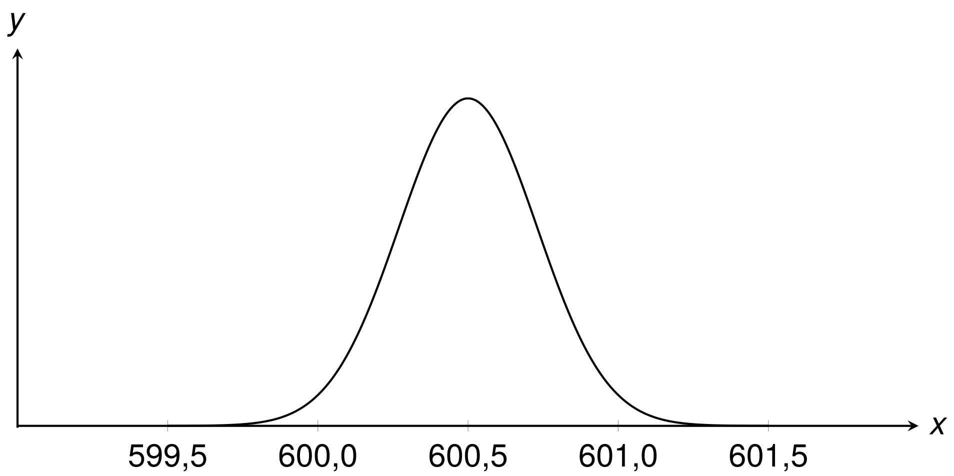


Abb. 1

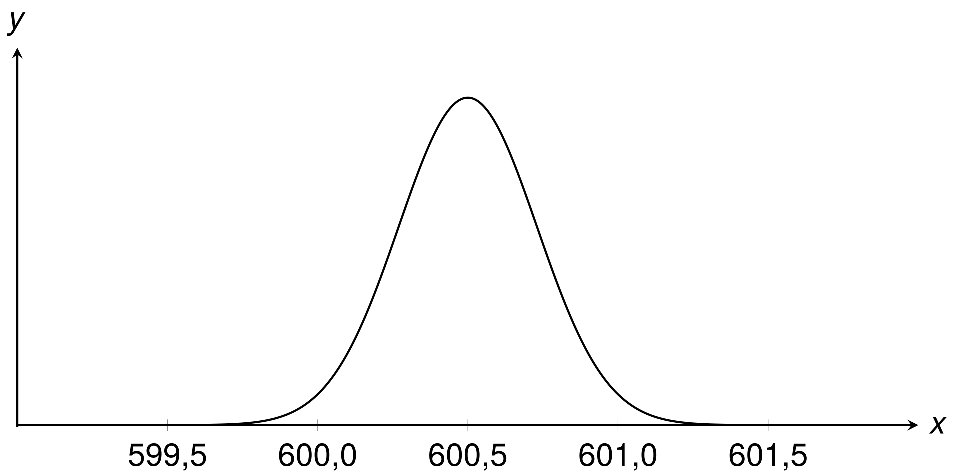


Abb. 2

Skizzieren Sie in der Abbildung 1 den Graphen einer Dichtefunktion, die sich aus dem Vorschlag 1 ergeben könnte, und in die Abbildung 2 den Graphen einer Dichtefunktion, die zum Vorschlag 2 passt.

Begründen Sie für jeden Vorschlag mithilfe des skizzierten Graphen, dass damit das Ziel des Unternehmens erreicht wird.

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

Lösung:

a) (1) Um die gemeinsamen Punkte (= Schnittpunkte) zu bestimmen, setzen wir die beiden Funktionsgleichungen gleich und bestimmen die Lösung der Gleichung:

Schnitt-punkte

$$
\begin{aligned}
f(x) \overset{!}{=} g(x) \quad \Rightarrow \quad \tfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \tfrac{3}{2}x + 5 &= -3x + 5 && \mid +3x - 5 \\
\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}x^3 - 3x^2 + \tfrac{9}{2}x &= 0 && \mid \cdot 2 \\
\Leftrightarrow \quad x^3 - 6x^2 + 9x &= 0 && \mid \text{ausklammern} \\
\Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 - 6x + 9) &= 0
\end{aligned}
$$

Nach dem Satz vom Nullprodukt ist ein Produkt Null, wenn einer der beiden Faktoren Null ist. In diesem Fall also $x = 0$ oder $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Satz vom Nullprodukt

Für die zweite Gleichung, nutzen wir die pq-Formel:

$$
\begin{aligned}
x &= -\tfrac{-6}{2} \pm \sqrt{\left(\tfrac{-6}{2}\right)^2 - 9} \\
&= 3 \pm \sqrt{9 - 9} \\
&= 3 \pm 0 \\
&= 3
\end{aligned}
$$

Somit lauten die gesuchten Stellen $x = 0$ und $x = 3$.

(2) Damit der Graph von g eine Tangente von f im Punkt P ist, muss der Punkt P auf beiden Graphen liegen und beide Graphen müssen in diesem Punkt die selbe Steigung besitzen.

Tangente

Wir müssen somit die Steigung beider Graphen im Punkt P bestimmen. Die Steigung von g ist konstant, da g eine Gerade ist: $m = g'(x) = -3$. Für die Steigung von f bestimmen wir zunächst die Ableitungsfunktion:

Ableiten

$$
f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 - 6x + \frac{3}{2}
$$

Die Funktion f hat an der Stelle $x = 3$ die Steigung:

$$
\begin{aligned}
f'(3) &= \tfrac{3}{2} \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 + \tfrac{3}{2} \\
&= \tfrac{27}{2} - 18 + \tfrac{3}{2} \\
&= -3
\end{aligned}
$$

Somit ist der Graph von g die Tangente von f im Punkt P.

Wertemenge

b) (1) Die Wertemenge ist die Menge aller möglichen Zahlen, die für die Funktion herauskommen können, wenn jede Zahl der Definitionsmenge für x in die Funktion eingesetzt wird. Da die Exponentialfunktion eine monoton steigende Funktion ist, wird die Funktion „nach oben“ unendlich groß.

Um den kleinsten Wert zu bestimmen, den die Funktion annehmen kann, betrachten wir den kleinsten Wert von x^2, um eine untere Grenze für f zu bestimmen. Da der Graph von x^2 eine nach oben geöffnete Parabel mit einem Scheitelpunkt bei $x = 0$ ist, liegt dort der Tiefpunkt von x^2 und somit auch von $e^{(x^2)}$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} f(x) \geq f(0) \quad \Rightarrow \quad f(x) &\geq e^0 \\ \Leftrightarrow \quad f(x) &\geq 1 \end{aligned}$$

Die Funktion nimmt alle Werte größer gleich 1 an und die Wertemenge wird wie folgt aufgeschrieben: $\mathbb{W} = \mathbb{R}_{\geq 1}$.

Alternative Schreibweisen: $\mathbb{W} = \{x | x \geq 1\}$ oder $\mathbb{W} = [1, \infty)$.

(2) Wir bestimmen wie in a) (1) den Schnittpunkt:

$$\begin{aligned} f(x) \stackrel{!}{=} f'(x) \quad \Rightarrow \quad f(x) &= 2x \cdot f(x) && | - f(x) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= 2x \cdot f(x) - f(x) && | \text{ ausklammern} \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= (2x - 1) \cdot f(x) \end{aligned}$$

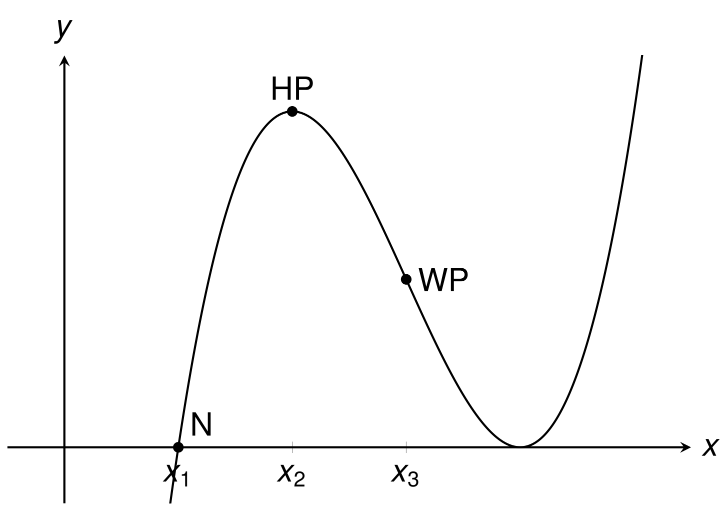
Aus dem Satz vom Nullprodukt folgt, dass entweder der Faktor $2x - 1 = 0$ oder der Faktor $f(x) = e^{x^2} = 0$ sein muss. Da die Exponentialfunktion für kein x Null wird, muss $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$ die gesuchte Stelle sein.

Die gesuchte Steigung beträgt:

$$f'\left(\tfrac{1}{2}\right) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot f\left(\tfrac{1}{2}\right) = f\left(\tfrac{1}{2}\right) = e^{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = e^{\frac{1}{4}}$$

c) (1) Die Extremstelle der Ableitungsfunktion ist der Wendepunkt der ursprünglichen Funktion. Da eine ganzrationale Funktion größer Grad 3 einen Wendepunkt aufweisen kann, muss die f mindestens vom Grad 3 sein.

(2) Skizze:



d) (1) Wir überlegen uns zunächst, wie die Funktion aussieht. Der Graph von f ist eine nach unten geöffnete Parabel ($-x^2$). Um den Flächeninhalt zwischen dem Graph und der x-Achse zu bestimmen, müssen wir also das Integral zwischen den Nullstellen berechnen. Da die Nullstellen bereits gegeben sind, folgt:

Fläche Graph und x-Achse

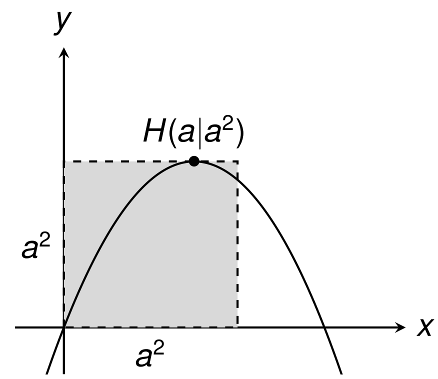
$$\int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{2a} -x^2 + 2ax\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}x^3 + ax^2\right]_0^{2a}$$

$$= -\frac{1}{3}\cdot(2a)^3 + a\cdot(2a)^2 = -\frac{8}{3}a^3 + 4a^3 = \frac{4}{3}a^3$$

(2) Die Fläche des Quadrates soll genau so groß sein, wie die Fläche zwischen f und der x-Achse im Intervall $[0, 2a]$. Wir müssen also herausfinden eine Seitenlänge des Quadrates herausfinden. Anhand der Abbildung können wir sehen, dass die horizontale gestrichelte Linie durch das Maximum der Funktion f geht. Da der Graph von f symmetrisch ist, liegt die Maximalstelle genau in der Mitte zwischen den Nullstellen: $x = a$.

Die Koordinaten des Hochpunktes lauten also:

$$f(x = a) = -a^2 + 2a^2 = a^2$$
$$\Rightarrow H(a|a^2)$$



Somit ist die Seitenlänge des Quadrats $s = a^2$ und der gesuchte Flächeninhalt beträgt allgemein

$$A_{\square} = a^2 \cdot a^2 = (a^2)^2 = a^4.$$

Zudem soll der Flächeninhalt des Quadrats mit dem Flächeninhalt aus Aufgabe d) (1) übereinstimmen. Daraus folgt:

$$\begin{aligned} A_{\square} \overset{!}{=} \int_0^{2a} f(x)\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad a^4 &= \tfrac{4}{3}a^3 \quad \left|-\tfrac{4}{3}a^3\right. \\ \Leftrightarrow \quad a^4 - \tfrac{4}{3}a^3 &= 0 \quad |\text{ ausklammern} \\ \Leftrightarrow \quad a^3\cdot\left(a - \tfrac{4}{3}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Aus dem Satz vom Nullprodukt folgt, dass entweder gilt:

$$a = 0 \text{ oder } a - \tfrac{4}{3} = 0 \Leftrightarrow a = \tfrac{4}{3}$$

Da $a > 1$ ist, muss $a = \frac{4}{3}$ sein.

e) (1) Wir können ein LGS auf verschiedene Arten lösen. Entweder mit dem Ein- oder Gleichsetzungsverfahren, dem Additionsverfahren oder dem Gauß-Algorithmus. Wir möchten hier schnell zum Ziel kommen und erkennen, dass Gleichung II und III nur aus zwei Unbekannten bestehen, die wir mit geschickter Addition direkt nach z auflösen können:

LGS lösen

$$
\begin{array}{r|rrrrrrcll}
\text{I} & 2x & & & + & z & = & 0 & & \\
\text{II} & & - & 2y & + & 4z & = & 0 & & \\
\text{III} & & & 2y & - & 5z & = & 1 & & \\
\hline
\text{II + III} & & & & - & z & = & 1 & \Leftrightarrow & z=-1 \\
z \text{ in II} & & - & 2y & - & 4 & = & 0 & \Leftrightarrow & y=-2 \\
z \text{ in I} & 2x & & & - & 1 & = & 0 & \Leftrightarrow & x=0{,}5
\end{array}
$$

Damit ist das LGS eindeutig lösbar.

(2) Das LGS hat sich in Zeile III geändert und nun steht dort $-5z$ statt $-rz$. Wir suchen einen Wert für r, für welches das LGS keine Lösung besitzt. Es muss also eine falsche Aussage herauskommen. Wir gehen genau so vor wie bei e) (1):

$$
\begin{array}{r|rrrrrrcll}
\text{I} & 2x & & & + & z & = & 0 & & \\
\text{II} & & - & 2y & + & 4z & = & 0 & & \\
\text{III} & & & 2y & - & rz & = & 1 & & \\
\hline
\text{II + III} & & & 4z & - & rz & = & 1 & \Leftrightarrow & z\cdot(4-r)=1 \Leftrightarrow z=\frac{1}{4-r}
\end{array}
$$

Wenn $r = 4$ ist, so steht im Nenner eine 0 und wir haben keine Lösung.

f) (1) Es liegt eine binomialverteilte Zufallsvariable vor und es sind n bzw. p gesucht. Bekannt sind sowohl der Erwartungswert als auch die Standardabweichung. Allgemein lassen sich diese beiden Werte wie folgt berechnen:

$$
\begin{array}{rrcl}
\text{Erwartungswert:} & \mu & = & n\cdot p \\
\text{Standardabweichung:} & \sigma & = & \sqrt{n\cdot p\cdot(1-p)}
\end{array}
$$

Der Erwartungswert steckt in der Formel der Standardabweichung und wenn wir dort unsere bekannten Werte einsetzen, erhalten wir p:

$$
\begin{array}{lcrcll}
\sigma = \sqrt{\underbrace{n\cdot p}_{\mu=}\cdot(1-p)} & \Rightarrow & 6 & = & \sqrt{60\cdot(1-p)} & \mid \sqrt{\ldots} \\
& \Rightarrow & 36 & = & 60\cdot(1-p) & \mid \div 60 \\
& \Leftrightarrow & 0{,}6 & = & 1-p & \mid -1 \\
& \Leftrightarrow & -0{,}4 & = & -p & \mid \cdot(-1) \\
& \Leftrightarrow & p & = & 0{,}4 &
\end{array}
$$

Einsetzen von p in die Gleichung des Erwartungswertes liefert:

$$\mu = n \cdot p \quad \Rightarrow \quad 60 = n \cdot 0{,}4 \quad |:0{,}4$$
$$\Leftrightarrow \quad n = 150$$

(2) Wir betrachten eine Urne mit insgesamt 10 Kugeln, aus der 150-mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen wird.

Binomial-verteilung

(i) Die Wahrscheinlichkeit eine schwarze Kugel zu ziehen, liegt bei $p = 0{,}4$. Da es sich um eine Binomialverteilung mit $n = 150$ handelt, lautet der Term für $k = 60$ (Treffer):

$$P_{150;0,4}(X = 60) = \binom{150}{60} \cdot 0{,}4^{60} \cdot 0{,}6^{90}$$

Diesen Wert können wir nur mit dem Taschenrechner bestimmen, ist aber bei dieser Aufgabe nicht verlangt.

(ii) Wenn X eine binomialverteilte Zufallsvariable ist $X \sim B(n, p)$, dann ist

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

die zugehörige Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung. n steht dabei für die Anzahl der Ziehungen, p für die Wahrscheinlichkeit eines Treffers und k für die Anzahl der Treffer. Wir sollen das Ereignis mit der Wahrscheinlichkeit

$$\underbrace{0{,}4^5}_{\text{Teil 1}} \cdot \underbrace{\binom{145}{55} \cdot 0{,}4^{55} \cdot 0{,}6^{90}}_{\text{Teil 2}}$$

beschreiben. Der Term $0{,}4^5$ könnte folgende Wahrscheinlichkeit des Ereignisses darstellen:

„Von den 150 gezogenen Kugeln sind die ersten fünf schwarz."

Der zweite Teil des Ausdrucks könnte die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

„Von 145 gezogenen Kugeln sind genau 55 schwarz."

beschreiben. Das Produkt aus diesen beiden Termen stellt die Wahrscheinlichkeit für folgendes Ereignis dar:

„Von den 150 gezogenen Kugeln sind die ersten fünf schwarz. Von den weiteren 145 gezogenen Kugeln sind genau 55 schwarz."

1.2.2 Prüfungsteil B

Analysis

Lösung:

a) (1) Die Steigung der Tangenten von f im Punkt P ist gleich der Steigung des Graphen in diesem Punkt. Wir benötigen zunächst also die Ableitungsfunktion, welche mit Hilfe der Produktregel bestimmt werden kann:

Produktregel

$$\begin{array}{l|ll} f(x) = u(x) \cdot v(x) & u(x) = x^3 - 5 & v(x) = e^x \\ f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) & u'(x) = 3x^2 & v'(x) = e^x \end{array}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left((x^3 - 5) \cdot e^x\right)' \\ &= 3x^2 \cdot e^x + (x^3 - 5) \cdot e^x \\ &= (x^3 + 3x^2 - 5) \cdot e^x \end{aligned}$$

Einsetzen von $x = -1$ liefert die Steigung in Punkt P:

$$f'(-1) = ((-1)^3 + 3 \cdot (-1)^2 - 5) \cdot e^{-1} = -3e^{-1}$$

Zur Bestimmung einer Geraden benötigen wir einen Punkt mit x- und y-Koordinate und eine Steigung. Uns fehlt also noch die y-Koordinate des Punktes P:

$$f(-1) = ((-1)^3 - 5) \cdot e^{-1} = -6e^{-1}$$

Um nun den Achsenschnittpunkt der Tangente zu erhalten, setzen wir den Punkt $P(-1| - 6e^{-1})$ und die Steigung ($m = -3e^{-1}$) in die allgemeine Geradengleichung ein.

$$\begin{array}{rrcll} y = mx + b \quad \Rightarrow & -6e^{-1} & = & -3e^{-1} \cdot (-1) + b & \\ \Leftrightarrow & -6e^{-1} & = & 3e^{-1} + b & \quad | - 3e^{-1} \\ \Leftrightarrow & -9e^{-1} & = & b & \end{array}$$

Somit lautet die Tangentengleichung: $y = -3e^{-1}x - 9e^{-1}$

(2) Um mögliche Kandidaten von Wendestellen zu bestimmen, benötigen wir die Nullstellen der zweiten Ableitungsfunktion. Die erste Ableitungsfunktion haben wir bereits in a) (1) bestimmt. Die zweite Ableitung erfolgt nach dem gleichen Vorgehen:

Wendestelle

$$\begin{array}{l|ll} f(x) = u(x) \cdot v(x) & u(x) = x^3 + 3x^2 - 5 & v(x) = e^x \\ f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x) & u'(x) = 3x^2 + 6x & v'(x) = e^x \end{array}$$

> Wenn e-Funktionen abgeleitet werden, sollte der Teil mit dem e immer ausgeklammert werden.

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left((x^3 + 3x^2 - 5) \cdot e^x\right)' \\ &= (3x^2 + 6x) \cdot e^x + (x^3 + 3x^2 - 5) \cdot e^x \\ &= (x^3 + 6x^2 + 6x - 5) \cdot e^x \end{aligned}$$

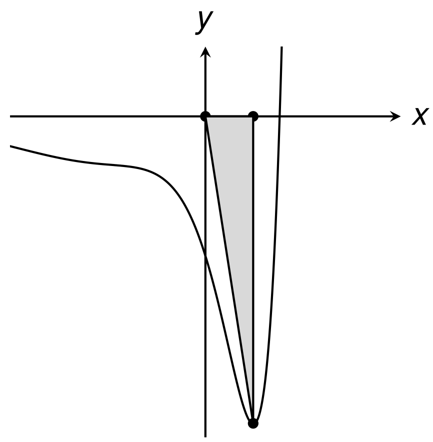
Da die Exponentialfunktion niemals Null wird, ergeben sich nach dem Satz vom Nullprodukt alle Lösungen aus dem Faktor mit dem Polynom. Diese lassen sich mit Hilfe des Taschenrechners bestimmen. Es folgt:

$$x_{w_1} \approx -4{,}361 \vee x_{w_2} \approx -2{,}167 \vee x_{w_3} \approx 0{,}529$$

Da laut der Aufgabenstellung genau 3 Wendestellen existieren, müssen wir die hinreichende Bedingung nicht überprüfen und die gefundenen Kandidaten sind die gesuchten Wendestellen.

(3) Eine grafische Bestimmung mittels Taschenrechner liefert den ungefähren Punkt $T(1{,}1| - 11) = P_{1,1}$. Das Dreieck besitzt in $Q_{1,1}$ einen rechten Winkel. Damit sind die Höhe und Basis gleich den Kathetenlängen, also 1,1 und 11. Für den Flächeninhalt des Dreiecks ergibt sich somit:

$$A = \frac{a \cdot b}{2} = \frac{1{,}1 \cdot 11}{2} = 6{,}05 \text{ FE}$$



b) (1) (i) Bei der Berechnung einer Fläche, die zwischen der Funktion und der x-Achse eingeschlossen wird, benötigen wir die Integralgrenzen. Nach links nähert sich die Funktion der Achse nur an, berührt sie aber nicht. Daher handelt es sich um ein uneigentliches Integral! Wir benötigen daher die einzige Nullstellen der Funktion f. Aus dem Satz vom Nullprodukt folgen wieder die Nullstellen aus dem Polynomfaktor:

Uneigentliches Integral

$$\begin{aligned} x^3 - 5 &= 0 \quad &| + 5 \\ \Leftrightarrow \quad x^3 &= 5 \quad &| \sqrt[3]{\ldots} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \sqrt[3]{5} \end{aligned}$$

Da der Graph ausschließlich unterhalb der x-Achse verläuft, entspricht der Flächeninhalt dem negativen Integralwert. Alternativ können wir auch Betragsstriche setzen! Der Taschenrechner liefert:

$$-\int_{-\infty}^{\sqrt[3]{5}} f(x) \, \mathrm{d}x \approx 24{,}947 \text{ FE}$$

(ii) Die y-Achse teilt die Fläche in zwei Teilflächen und es ist das Verhältnis der zugehörigen Flächeninhalte gesucht. Die Fläche im 4. Quadranten wird rechts durch die berechnete Nullstelle und links von der Geraden $x = 0$ begrenzt. Es folgt für die Fläche rechts von der y-Achse:

Quadranten

$$-\int_0^{\sqrt[3]{5}} f(x)\,\mathrm{d}x = 11 \text{ FE}$$

Damit ist das andere Flächenstück links der y-Achse $24{,}947 - 11 = 13{,}947$ FE groß. Die Verhältnisse betragen somit:

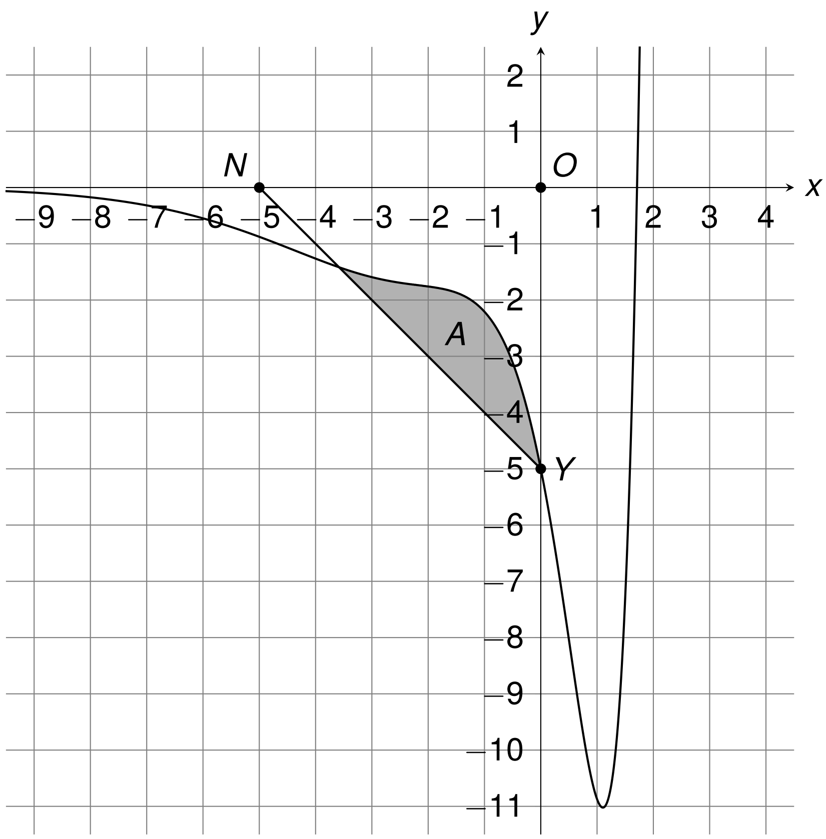
$$\frac{11}{13{,}947} \approx \frac{1}{1{,}268} \quad \text{bzw.} \frac{13{,}947}{11} \approx \frac{1}{0{,}789}$$

(2) Der Integralwert gibt die Flächenbilanz an. Wenn der Integralwert Null ist, dann entspricht der Flächeninhalt unterhalb der x-Achse exakt der Fläche oberhalb der x-Achse. Den passenden z-Wert können wir mit dem Taschenrechner ermitteln:

Interpretation Integralwert

$$\int_0^z (x^3 - 5) \cdot e^x \,\mathrm{d}x \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow z \approx 2{,}271$$

(3) (i) Skizze:



(ii) Um die Fläche A zu bestimmen, benötigen wir zum einen die Geradengleichung der Strecke $\overline{NY}$ und den Schnittpunkt der Geraden mit der Funktion f im 3. Quadranten. Für die Geradengleichung bestimmen wir zunächst die Steigung zwischen den Punkten N und Y mit Hilfe des Steigungsdreiecks:

Steigungsdreieck

$$\text{Mit } N(-5|0) \text{ und } Y(0|-5) \text{ folgt:} \quad \begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-5-0}{0-(-5)} \\ &= -1 \end{aligned}$$

Der y-Achsenabschnitt ist wegen des Punktes Y bekannt ($\Rightarrow b = -5$). Somit ergibt sich folgende Geradengleichung:

$$\begin{aligned} y &= m \cdot x + b = (-1) \cdot x - 5 \\ &= -x - 5 \end{aligned}$$

Jetzt fehlt noch der Schnittpunkt von Gerade und Funktion, den wir mit Hilfe des Taschenrechners direkt berechnen können: $x \approx -3{,}582$.
Da der Graph der Funktion f verläuft oberhalb der Geraden verläuft, ergibt sich der Flächeninhalt mit Hilfe der Differenzenfunktion zu:

Fläche zwischen Graphen

$$\int_{-3{,}582}^{0} (f(x) - g(x))\, \mathrm{d}x \approx 3{,}748 \text{ FE}$$

(iii) Wir suchen die beiden Punkte auf dem Graphen von f, in denen die Tangente parallel zur Strecke $\overline{NY}$ verläuft, welche die Steigung $m = -1$ hat. Wir wissen, dass parallele Geraden die gleiche Steigung haben müssen. Da die Steigung der Tangenten der Steigung des Graphen in diesem Punkt entspricht, suchen wir somit die Stellen, an denen die Ableitungsfunktion $f'(x)$ den Wert -1 annimmt.

Der Taschenrechner liefert die Berührstellen $x_1 \approx -1{,}949$ und $x_2 \approx 1{,}070$. Wenn wir diese Werte nun in die Funktion f einsetzen, erhalten wir die Punkte, in denen die Tangente parallel zu der Seite verlaufen:

$$B_1(-1{,}049|-2{,}156) \quad \text{bzw.} \quad B_2(1{,}070|-11{,}005)$$

c) (1) Wir betrachten ab sofort eine Funktionenschar $f_k(x)$, die für f_{-5} mit der Funktion f übereinstimmt. Anhand Abbildung 4 sollen wir den drei verschiedenen Graphen die entsprechenden Parameter zuweisen. Dazu identifizieren wir die Funktionsgraphen anhand der y-Achsenabschnitte. Aus

$$f_k(x = 0) = (0^3 + k) \cdot e^0 = k$$

folgt, dass die y-Achsenabschnitte genau dem Parameter k entsprechen. Somit ist $k_I = 2, k_{II} = 0$ und $k_{III} = -4$.

(2) Wir untersuchen die Scharfunktion

$$f_k(x) \stackrel{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \quad (x^3 + k) \cdot e^x \quad = \quad 0$$

auf Nullstellen und sehen mit Hilfe dem Satz vom Nullprodukt, dass erneut die Nullstellen nur aus dem Polynomfaktor folgen können, da e^x niemals Null werden kann:

$$\begin{aligned} x^3 + k &= 0 & &| -k \\ \Leftrightarrow \quad x^3 &= -k & &| \sqrt[3]{\ldots} \\ \Leftrightarrow \quad x &= \sqrt[3]{-k} \end{aligned}$$

Sowohl für positive als auch negative reelle Zahlen liefert die dritte Wurzel genau eine Lösung. Somit existiert für jedes k genau eine Nullstelle.

(3) (i) Die Funktion h_k wird auf Nullstellen untersucht, was im Grunde einfach dem Polynomteil der Ableitungsfunktion f_k' entspricht. Wir sollen keine Nullstellen ausrechnen, sondern anhand Abbildung 5 die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von k angeben.

Der Parameter k entspricht dem y-Achsenabschnitt, welcher also den Graphen von h_k nach oben für ein positives k bzw. nach unten für ein negatives k verschiebt. Es entstehen durch die Verschiebung folgende Fälle:

1. Ist wie bei der jetzigen Abbildung 5 ein Extrempunkt ebenfalls Nullstelle, so hat der Graph zwei Schnittstellen mit dem Graphen. Wird der Graph soweit nach unten verschoben, dass der Hochpunkt eine Nullstelle ist, so liegen ebenfalls zwei Nullstellen vor:

   „Genau zwei Nullstellen für $k = 0$ und $k = -4$."

2. Liegt der Hochpunkt oberhalb und der Tiefpunkt unterhalb der x-Achse, so ergeben sich drei Nullstellen:

   „Genau drei Nullstellen für $-4 < k < 0$."

3. Für alle weiteren Werte für k ergibt sich eine Nullstelle, denn dann liegen beide Extrempunkte auf einer Seite von der x-Achse:

   „Genau eine Nullstelle für $k < -4$ und $k > 0$"

(ii) S1: Wenn $k > 0$ ist, dann hat die Funktion h_k und damit auch die Funktion f_k' genau eine Nullstelle mit einem Vorzeichenwechsel. Die Funktion f_k besitzt daher genau eine Extremstelle.

S2: h_k ist eine Polynomfunktion dritten Grades und kann daher maximal drei Nullstellen haben. Da h_k dem Polynomteil der Ableitungsfunktion f_k entspricht und wir nach der notwendigen Bedingung die Ableitungsfunktion auf ihre Nullstellen untersuchen, kann die Funktion f_k maximal drei Extremstellen besitzen.

S3: Die Funktion h_k hat nur für $k = 0$ oder $k = 4$ zwei Nullstellen. Bei einer Nullstelle schneidet der Graph die x-Achse, bei der anderen berührt der Graph die x-Achse, sodass hier eine Nullstelle mit waagerechter Tangente vorliegt. Die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle, der Vorzeichenwechsel bei der 1. Ableitungsfunktion, findet an der Berührstelle nicht statt. Somit gibt es keine Funktion f_k, die genau zwei Extremstellen hat.

Geometrie

Lösung:

a)

(1) Wir haben fast alle Koordinaten des Körpers K vorliegen und können aus dem Zusammenhang die fehlenden Koordinaten von B_1 bestimmen. Das Rechteck $B_1B_2B_3B_4$ liegt parallel zur x_1x_2-Ebene, so dass wir die x_3 von den anderen gegebenen Koordinaten des Rechtecks übernehmen können:

1. $B_1(x_1|x_2|30)$

Die x_1-Koordinate entspricht der Koordinate von B_2:

2. $B_1(10|x_2|30)$

Da das Viereck $A_1A_4B_4B_1$ parallel zur x_1x_3-Achse verläuft, entspricht die x_2-Koordinate der Koordinate von A_4. Damit lauten die Koordinaten des gesuchten Punktes:

3. $B_1(10|-5|30)$

(2) Wenn wir ein Viereck mit zwei parallelen Seiten vorliegen haben, nennen wir es Trapez. Wir müssen also nachweisen, dass es zwei parallele Seiten gibt. Der Abbildung nach müsste es sich um die Strecken $\overline{A_2A_3}$ und $\overline{B_2B_3}$ handeln. Zwei Strecken sind parallel, wenn ihre Vektoren Vielfache voneinander sind:

Lineare Abhängigkeit

$$\overline{A_2A_3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 50 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{75}}{3} - 50\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

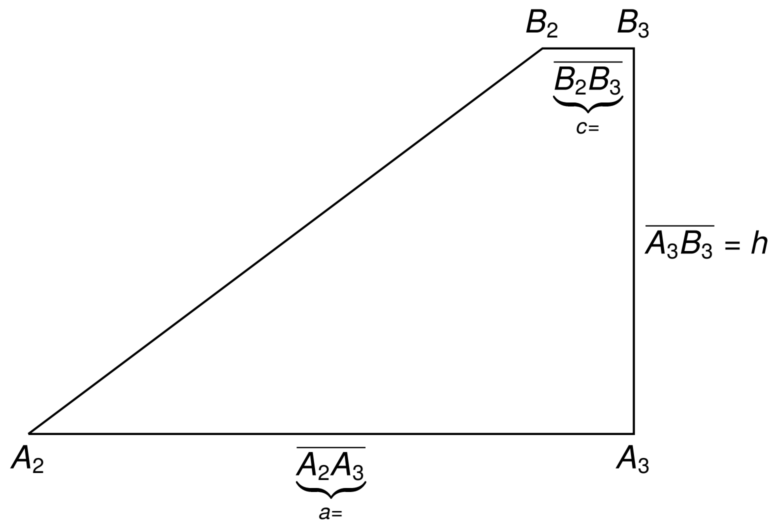
$$\overline{B_2B_3} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} - 10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{\sqrt{75}}{3} - 10\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Durch cleveres Ausklammern sehen wir sofort, dass die Richtungsvektoren Vielfache voneinander sind und damit das Viereck ein Trapez ist.

Nachdem wir den Nachweis erbracht haben, machen wir uns an die Berechnung des Volumens. Das Volumen eines Körpers können wir allgemein formulieren als

$$V = G \cdot h$$

wobei G die Grundseite und h die Höhe des Körpers ist. Betrachten wir den Körper in Richtung x_1x_3-Ebene, haben wir als Grundfläche das Trapez vorliegen. Wir schauen uns das Trapez in einer kleinen Abbildung an.



Der Flächeninhalt eines Trapezes mit den Grundseiten (parallelen Seiten) a und c sowie der Höhe h berechnet sich nach der Formel

$$A = \frac{1}{2}(a + c) \cdot h = \frac{1}{2}(\overline{A_2A_3} + \overline{B_2B_3}) \cdot A_3B_3$$

Um die Strecken zu berechnen könnten wir jetzt die Richtungsvektoren aus den Punkten aufstellen und den zugehörigen Betrag (= Länge eines Vektors) bestimmen. Es geht aber etwas einfacher, da wir aus dem Körper eine Fläche gemacht haben und dadurch eine Dimension (die Tiefe x_2) herausgenommen haben.

- Abstand von A_2 zu A_3 = Differenz der x_1-Koordinate

$$a = \overline{A_2A_3} = 50 - \frac{\sqrt{75}}{3}$$

- Abstand von B_2 zu B_3 = Differenz der x_1-Koordinate

$$c = \overline{B_2B_3} = 10 - \frac{\sqrt{75}}{3}$$

- Abstand von A_2 zu B_3 = x_3-Koordinate von B_3

Daraus folgt für den Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2}\left(\left(50 - \frac{\sqrt{75}}{3}\right) + \left(10 - \frac{\sqrt{75}}{3}\right)\right) \cdot 30 = \left(30 - \frac{\sqrt{75}}{3}\right) \cdot 30$$
$$\approx 813{,}397 \text{ FE}$$

Die Höhe des Körpers ist genau der Höhenunterschied zwischen $A_2A_3B_3B_2$ und $A_1A_4B_4B_1$ und entspricht 10 LE. Daraus folgt das Volumen mit:

$$V_K = 813{,}397 \cdot 10 = 8\,133{,}97 \text{ VE}$$

b)

(1) Wir sollen zeigen, dass ein allgemeiner Punkt auf der Strecke $\overline{A_2B_2}$ liegt. Dazu stellen wir zunächst die Geradengleichung in Parameterform auf:

Parameterform Gerade

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{0A_2} + t \cdot \overrightarrow{A_2B_2}$$
$$= \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left(\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix}; \; t \in \mathbb{R}$$

Für $0 \leq t \leq 1$ spiegelt die Gerade die Punkte der Kante wieder. Nun machen wir eine Punktprobe mit dem allgemeinen Punkt $(50 - a|5|0{,}75a)$:

Schnittpunkt von Geraden

$$\begin{pmatrix} 50-a \\ 5 \\ 0{,}75a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{lrcll} \text{I} & 50-a & = & 50-40t & \Leftrightarrow t = \frac{a}{40} \\ \text{II} & 5 & = & 5 & \checkmark \\ \text{III} & 0{,}75a & = & 30t & \Leftrightarrow t = \frac{a}{40} \end{array}$$

In Zeile I und III bekommen wir das gleiche Ergebnis und Zeile II liefert eine wahre Aussage. Damit liegen alle Punkte auf der Geraden und der Ausdruck $\frac{a}{40}$ steigt für größer werdende a. Für $a = 0$ ist $t = 0$ und für $a = 40$ ist $t = 1$. Somit liegen alle beschriebenen Punkte auf der Strecke $\overline{A_2B_2}$.

(2) Wenn wir uns die Gleichung der gegebenen Ebene anschauen, stellen wir fest, dass der Ortsvektor dem Schnittpunkt mit der Kante $\overline{A_2B_2}$ entspricht, denn für $a = 12$ ist: $(50 - 12|5|0{,}75 \cdot 12) = (38|5|9)$. Wir sehen zudem am hinteren Spannvektor, dass die Seitenkante des Balkons parallel zur x_2-Achse verläuft. Um die vordere Ecke zu erreichen, setzen wir den Parameter s maximal ($s = 3$) und den anderen Parameter gleich Null ($r = 0$):

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 38 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Die Stütze s_1 liegt nun auf einer Geraden h, die parallel zur x_3-Achse verläuft und durch den Punkt C geht. Um den Endpunkt der Stütze s_1 zu erhalten, stellen wir eine Geradengleichung der Gerade h auf und bestimmen den Schnittpunkt mit der Geraden g, die die Kante $\overline{A_2B_2}$ beschreibt. Der Richtungsvektor ist der Einheitsvektor der x_3-Achse.

Geradengleichung

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 41 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; \; u \in \mathbb{R}$$

Für den Schnittpunkt setzen wir die Gerade und die Ebene gleich:

$$\begin{pmatrix}50\\5\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}-40\\0\\30\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41\\5\\9\end{pmatrix}+u\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{array}{rrcll}\text{I} & 50-40t & = & 41 & \Leftrightarrow t=\frac{9}{40}\\ \text{II} & 5 & = & 5 & \checkmark\\ \text{III} & 30t & = & 9+u & \Leftrightarrow u=-\frac{9}{4}\end{array}$$

Wenn wir einen der beiden Parameter in die Geradengleichung einsetzen (wir setzen hier u ein) erhalten wir den Endpunkt der Stütze:

$$\vec{d}=\begin{pmatrix}41\\5\\9\end{pmatrix}-\frac{9}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}41\\5\\6{,}75\end{pmatrix}$$

Abschließend können wir den Vektor entlang der Stütze aufstellen und die zugehörige Länge berechnen:

$$|\vec{s}_1|=\overline{CD}=\left|\begin{pmatrix}41\\5\\6{,}75\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}41\\5\\9\end{pmatrix}\right|=\left|\begin{pmatrix}0\\0\\-2{,}25\end{pmatrix}\right|=2{,}25\text{ LE}$$

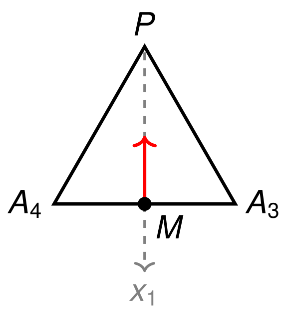
Die Stütze hat die Länge 2,25 LE.

c)

(1) Da das Dreieck gleichseitig ist, gehen die Symmetrie-Achsen jeweils durch die Mitte einer Seitenkante und durch den gegenüberliegenden Punkt. Die Symmetrieachse durch die Kante $\overline{A_3A_4}$ entspricht der x_1-Achse.

Der Mittelpunkt der Kante $\overline{A_3A_4}$ ist der Punkt

$$M\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\mid 0\mid 0\right).$$



Vom Mittelpunkt aus gesehen, gehen wir dann in entgegengesetzte Richtung der x_1-Achse.

Damit erhalten wir als Gerade, welche die Symmetrieachse beschreibt:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{75}}{3}\\0\\0\end{pmatrix}+v\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix};\ v\in\mathbb{R}$$

Um herauszufinden, wie weit wir diese Gerade entlang laufen müssen, um zu P zu kommen, bestimmen wir die Höhe des Dreiecks. Da alle Seiten (nennen wir sie a) gleich lang sind, folgt mit dem Satz des Pythagoras:

Höhe gleichseitiges Dreieck

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 + h^2 = a^2 \Leftrightarrow h = \frac{a}{2} \cdot \sqrt{3}$$

Die Größe a entspricht der Länge einer Seitenkante, also der Länge der Strecke $\overline{A_3A_4} = 10$. Daraus folgt für die Höhe:

$$h = \frac{10}{2} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{75}$$

Wir setzen $v = \sqrt{75}$ in unsere aufgestellte Geradengleichung ein und erhalten den gesuchten Punkt P:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \sqrt{75} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2\sqrt{75}}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow P\left(-\frac{2\sqrt{75}}{3} \mid 0 \mid 0\right)$$

(2) Der Abstand von A_4 zum Ursprung entspricht der Länge des Vektors $\vec{a}_4$:

Länge Vektor

$$|\vec{a}_4| = \left| \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{75}}{3} \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{75}}{3}\right)^2 + (-5)^2} = \sqrt{\frac{300}{9}} = \frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ LE}$$

Die Abstand beträgt somit ca. 5,774 LE.

d)

(1) Wir stellen zunächst die Parameterform der Ebene auf. Dazu legen wir den Vektor $\vec{a}_2$ als Ortsvektor und die Richtungsvektoren als $\overrightarrow{A_2A_1}$ und $\overrightarrow{A_2B_2}$ fest. Die Parameterform lautet:

Koordinatenform aufstellen

$$\begin{aligned} F: \vec{x} &= \vec{a}_2 + i \cdot \overrightarrow{A_2A_1} + j \cdot \overrightarrow{A_2B_2} \\ &= \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \left[\begin{pmatrix} 50 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] + j \cdot \left[\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 30 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + j \cdot \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Kreuzproduktes aus den Richtungsvektoren stellen wir den Normalenvektor auf:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -40 \\ 0 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \cdot 30 - 0 \cdot 0 \\ 0 \cdot (-40) - 30 \cdot 0 \\ 0 \cdot 0 - (-40) \cdot (-10) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -300 \\ 0 \\ -400 \end{pmatrix} = -100 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es bietet sich dabei an, einen möglichst großen Faktor auszuklammern. Dann folgt für die Ebene F in Koordinatenform mit P für einen beliebigen Punkt der Ebene (hier der Ortsvektor $\vec{a}_2$):

Skalarprodukt

$$F : \vec{n} \bullet [\vec{x} - \vec{p}] = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \bullet \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 50 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = 0 \Leftrightarrow 3x_1 + 4x_3 = 150$$

(2) Damit der Schatten innerhalb der Fläche $A_1A_2B_2B_1$ liegt, muss der Schnittpunkt von der Geraden, welche das Licht beschreibt (= Lichtquelle) und der Ebene, welche die Fläche beschreibt, innerhalb der beschreibenden Parameterbereiche liegen.

Schattenpunkt

Die Geradengleichung des Lichts der Spitze ist einfach aufzustellen:

$$l : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6k \\ 0 \\ 35 - 2k \end{pmatrix} ; \; k \in \mathbb{R}$$

Einsetzen der Geradengleichung in die Koordinatenform aus d) (1)

Schnittpunkt Gerade und Ebene

$$\begin{aligned} 3 \cdot \overbrace{6k}^{=x_1} + 4 \cdot \overbrace{(35 - 2k)}^{=x_3} &= 150 \\ \Leftrightarrow \quad 10k + 140 &= 150 \quad | -140 \\ \Leftrightarrow \quad 10k &= 10 \quad | \div 10 \\ \Leftrightarrow \quad k &= 1 \end{aligned}$$

liefert den gesuchten Schnittpunkt:

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 35 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Da der Schnittpunkt $S(6|0|33)$ eine größere x_3-Koordinate (= 33) aufweist als die höchsten Punkte der Fläche (z.B. B_3 mit $x_3 = 30$), kann der Schatten nicht innerhalb der Fläche liegen.

Stochastik

Lösung:

a) (1) Die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Flasche weniger als 600 ml enthalten sind, beträgt 1,5%. Daher beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine Flasche mindestens 600 ml Öl enthält:

$$1 - 0{,}015 = 0{,}985$$

Die Wahrscheinlichkeit $0{,}985^{12}$ bedeutet also, dass alle 12 Flaschen in einem Karton mindestens 600 ml Öl enthalten. Die gesuchte Aufgabenstellung könnte also lauten:

„Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einem Karton alle 12 Flaschen mindestens 600 ml Öl enthalten."

(2) Die Zufallsvariable X sei binomialverteilt und beschreibt die Anzahl der Flaschen mit einer Füllmenge von weniger als 600 ml unter den 100 Flaschen. Mit $n = 100$ und $p = 0{,}015$ folgt:

$$P_{100;0{,}015}(X = 3) \approx 0{,}126$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter 100 Flaschen genau drei Flaschen mit weniger als 600 ml Öl befinden, beträgt ca. 12,6%.

(3) Wenn die vierte überprüfte Flasche die erste Flasche sein soll, die weniger als 600 ml enthält, dann müssen die ersten drei Flaschen mehr als 600 ml enthalten. Das eine Flasche mehr bzw. weniger als 600 ml enthält, hat eine Wahrscheinlichkeit von 0,985 bzw. 0,015. Somit folgt:

$$0{,}985 \cdot 0{,}985 \cdot 0{,}985 \cdot 0{,}015 = 0{,}985^3 \cdot 0{,}015 \approx 0{,}014$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die vierte Flasche weniger als 600 ml Öl enthält, beträgt ca 1,4%.

(4) Die Zufallsgröße X gibt die Anzahl der Flaschen an, die mindestens 600 ml Öl enthalten. Laut Aufgabenstellung ist der Erwartungswert größer als 780, also gilt $\mu > 780$. Der Erwartungswert einer Binomialverteilung berechnet sich allgemein über $\mu = n \cdot p$. Da wir $p = 0{,}985$ ebenfalls gegeben haben, können wir die Ungleichung nach n umstellen:

$$\begin{aligned} & n \cdot 0{,}985 &>& \ 780 \qquad | \div 0{,}985 \\ \Leftrightarrow \quad & n &>& \ 791{,}878 \\ \Leftrightarrow \quad & n &\geq& \ 792 \end{aligned}$$

Es müssen mindestens 792 Flaschen geliefert werden.

(5) Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt und gibt die Anzahl der Flaschen innerhalb **eines** Kartons an, die weniger als 600 ml Öl enthalten. X ist binomialverteilt mit $n = 12$ und $p = 0{,}015$ und ein Karton ist fehlerhaft, wenn mindestens 2 Flaschen weniger als 600 ml Öl enthalten:

Binomial-verteilung

$$P(\text{„Karton ist fehlerhaft“}) = P(X \geq 2) = 1 - P(X \leq 1) \approx 0{,}013$$

Die Zufallsgröße Y gibt die Anzahl an fehlerhaften Kartons an und ist ebenfalls binomialverteilt mit $n = 150$ und $p = P(X \geq 2) \approx 0{,}013$. Mehr als 3% der Lieferung sind fehlerhaft, also $150 \cdot 0{,}03 = 4{,}5$. Da es nur ganze Kartons gibt, ist die Wahrscheinlichkeit gesucht, dass mindestens 5 Kartons fehlerhaft sind:

$$P(Y \geq 5) = 1 - P(X \leq 4) \approx 0{,}047$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 4,7% sind mehr als 3% der Kartons fehlerhaft.

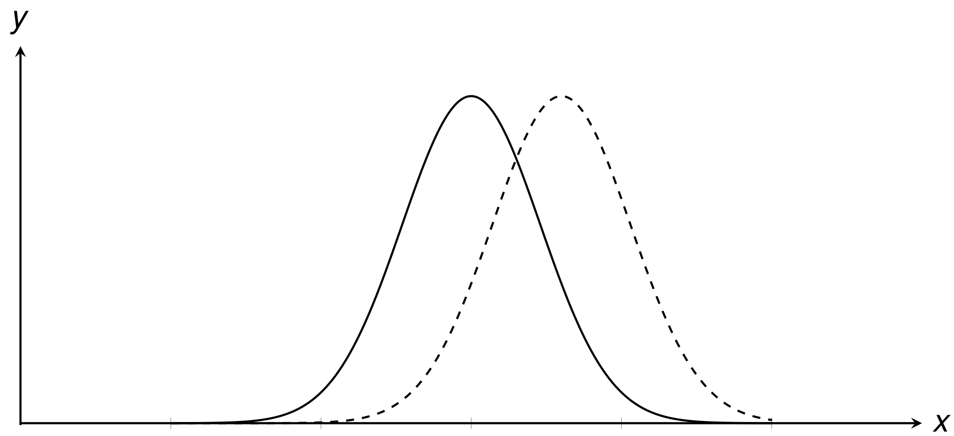
b) (1) Die Zufallsgröße X ist normalverteilt und gibt die Füllmenge einer Flasche [in ml] an. Mit $\mu = 600{,}5$ und $\sigma = 0{,}23$ folgt für die gesuchten Wahrscheinlichkeiten:

$$P(A) = P(X \geq 601) \approx 0{,}015$$
$$P(B) = P(600{,}5 - 0{,}5 \leq X \leq 600{,}5 + 0{,}05) = P(600 \leq X \leq 601) \approx 0{,}970$$

(2) Die Möglichkeit, die von der angewandten Normalverteilung für negative Füllmengen bereitgestellt wird, ist derart gering, dass sie im Kontext vernachlässigt werden kann.

(3) **Vorschlag 1:**
Der bisherige Erwartungswert von $\mu = 600{,}5$ wird erhöht. Das Schaubild der Dichtefunktion verschiebt sich dadurch nach rechts, da der x-Wert des Hochpunktes den Erwartungswert darstellt.

Der Vorschlag funktioniert, da die Fläche für $x \leq 600$ zwischen der x-Achse und der gestrichelten Kurve kleiner wird.



Vorschlag 2:
Wenn die Genauigkeit erhöht wird, verringert sich die Standardabweichung σ. Das Schaubild der Dichtefunktion wird damit um den Hochpunkt steiler. Der y-Wert des Hochpunktes wird aber größer, da ansonsten die Fläche zwischen dem Schaubild und der x-Achse kleiner als 1 werden würde.

Der Vorschlag funktioniert ebenfalls, da die Fläche für $x \leq 600$ zwischen der x-Achse und der gestrichelten Kurve kleiner wird.