Gymnasium **BaWü**

Mathe Abitur
Klausuren

Originale Prüfungsaufgaben

inkl. Lösungen & Lernvideos von

Daniel Jung

Jahr: 2024

StudyHelp

Mathe Abi Klausurenheft – Baden-Württemberg

Prüfungsjahr 2024

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Christian Strack
Konzept & Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

1 Abi Klausur 2024

Änderungen ab Abitur 2024

Für das Mathematik-Abitur in Baden-Württemberg gab es ab 2024 einige Änderungen, die auch für 2025 relevant sind:

- **Prüfungsstruktur:** Die schriftliche Abiturprüfung besteht aus zwei Teilen:
  - **Teil A (ohne Hilfsmittel):**
    - 6 Aufgaben mit jeweils 5 Bewertungseinheiten (BE).
    - **Block 1:** 4 Pflichtaufgaben:
      - 2 Aufgaben aus der Analysis
      - 1 Aufgabe aus der Geometrie
      - 1 Aufgabe aus der Stochastik
    - **Block 2:** 2 Wahlaufgaben aus den Bereichen Analysis, Geometrie und Stochastik.
  - **Teil B (mit Hilfsmitteln):**
    - Nutzung von Hilfsmitteln wie dem wissenschaftlichen Taschenrechner und der Formelsammlung erlaubt.
- **Neue Formelsammlung:** Die bisherige Formelsammlung BaWüs wurde durch die Formelsammlung des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB) ersetzt.

Hinweise für Abitur 2025

- Die oben genannten Änderungen gelten weiterhin für 2025.
- Die schriftlichen Abiturprüfungen finden voraussichtlich vom 29. April bis 21. Mai 2025 statt.
- Die mündlichen Prüfungen sind vom 30. Juni bis 9. Juli 2025 angesetzt.
- Prüflinge sollten sich frühzeitig mit der neuen Prüfungsstruktur und der IQB-Formelsammlung vertraut machen.
- Es wird empfohlen, regelmäßig die offiziellen Mitteilungen des Kultusministeriums zu verfolgen.

1.1 Aufgaben

1.1.1 Prüfungsteil A

- Es dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.
- Maximal zu erreichende Punkte: 30 Bewertungseinheiten (BE)
- Maximale Bearbeitungszeit: 110 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

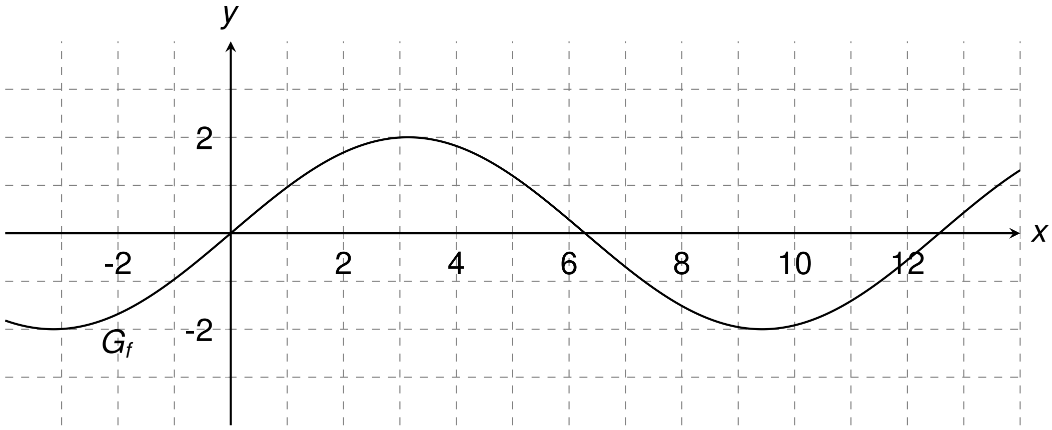
Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
Pflichtaufgaben	1	a)	2	
		b)	3	
	2	a)	2	
		b)	3	
	3	a)	2	
		b)	3	
	4	a)	2	
		b)	3	
Wahlaufgaben	5	a)	1	
		b)	4	
	6		5	
	7	a)	2	
		b)	3	
	8	a)	1	
		b)	4	
	9		5	
	10		5	

Pflichtaufgaben

Bearbeiten Sie alle Aufgaben 1 bis 4.

Aufgabe 1:
Die Abbildung zeigt den Graphen G_f der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f mit

$$f(x) = 2 \cdot \sin\left(\frac{1}{2}x\right).$$



a) Beurteilen Sie mithilfe der Abbildung, ob der Wert des Integrals

$$\int_{-2}^{8} f(x)\,\mathrm{d}x$$

negativ ist.

b) Weisen Sie rechnerisch nach, dass die folgende Aussage zutrifft:

Die Tangente an G_f im Koordinatenursprung ist die Gerade durch die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$.

Aufgabe 2:
G_f ist der Graph der Funktion f mit $f(x) = e^{2x-1}$.

a) G_f besitzt einen Schnittpunkt mit einer Koordinatenachse und eine Asymptote. Geben Sie die Koordinaten dieses Schnittpunkts sowie eine Gleichung dieser Asymptote an.

b) G_g ist der Graph der Funktion g mit $g(x) = e^{\frac{1}{4}-\frac{1}{2}x}$. Es gilt $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$.

Zeigen Sie, dass sich G_f und G_g an der Stelle $x_0 = \frac{1}{2}$ orthogonal schneiden.

Aufgabe 3:
Gegeben ist die Schar der Ebenen

$$E_a\colon 2ax_1 - 4x_2 + (a-2)x_3 = 12 \text{ mit } a \in \mathbb{R}.$$

a) Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den E_a parallel zur Gerade mit der Gleichung

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

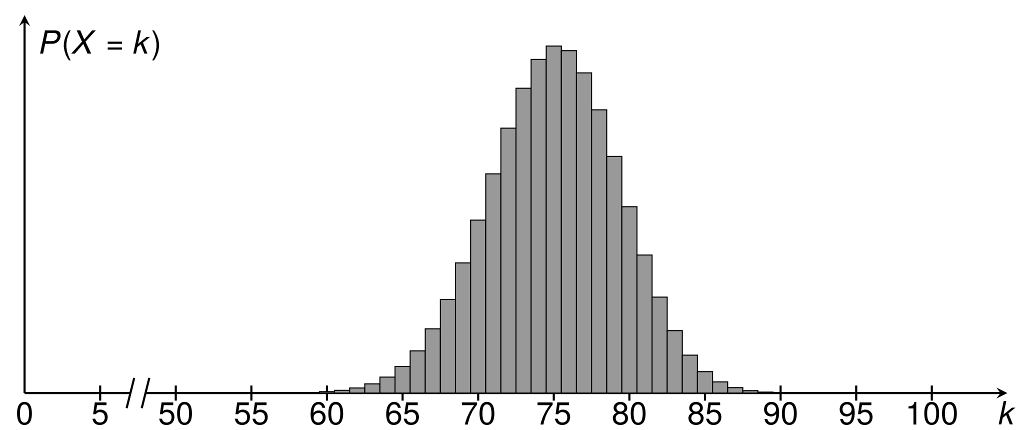
mit $t \in \mathbb{R}$ verläuft.

b) Prüfen Sie, ob die Ebene mit der Gleichung $6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$ zur Schar gehört.

Aufgabe 4:
Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl, wie oft dabei die Farbe „Blau", die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb" erzielt wird.

a) Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben.

b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.



Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.

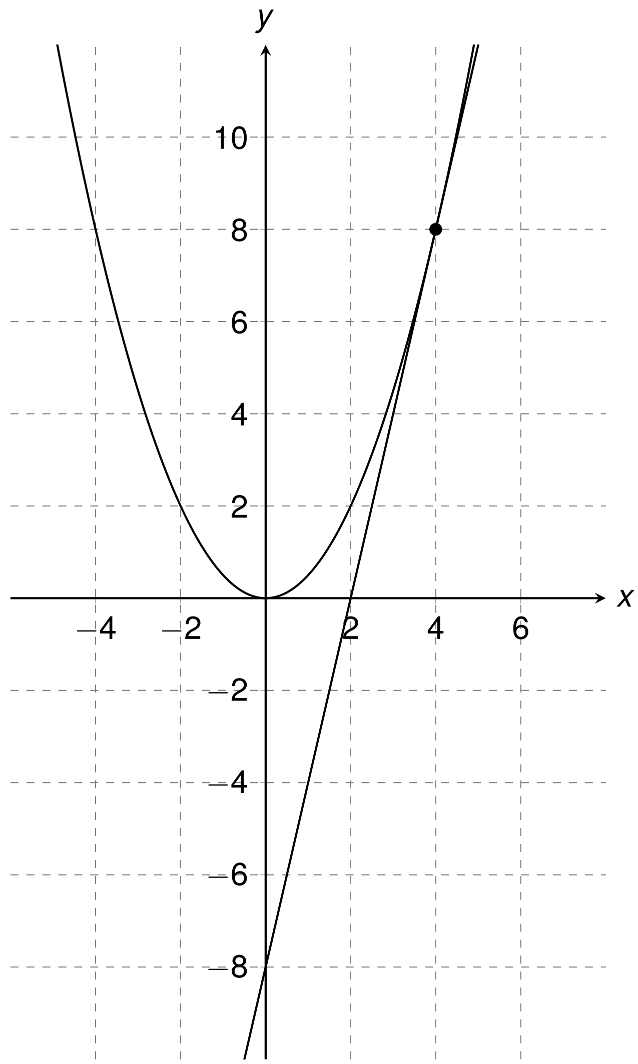
Wahlaufgaben

Bearbeiten Sie zwei der Aufgaben 5 bis 10.

Aufgabe 5:
Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f_a mit

$$f_a(x) = a \cdot x^2.$$

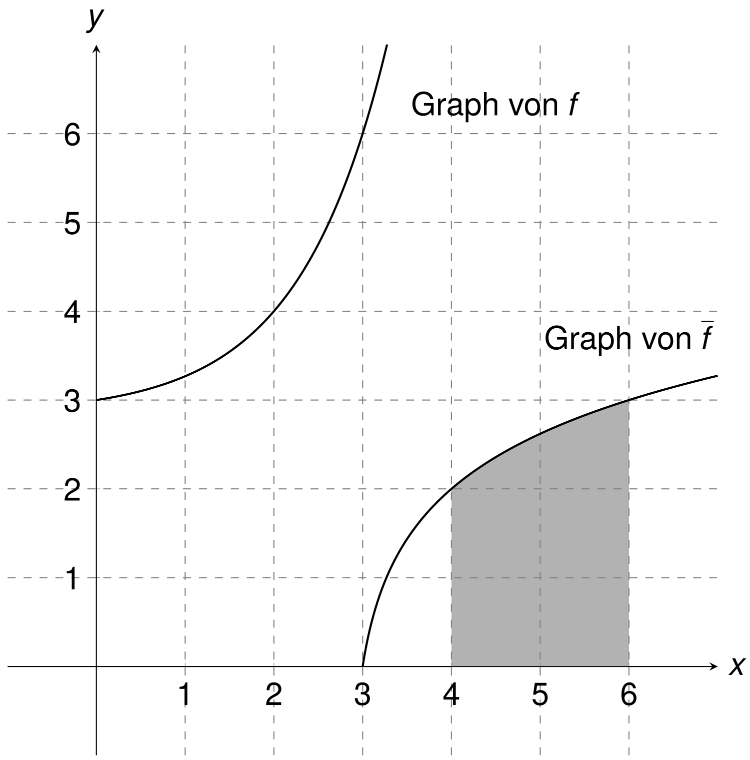
Die Abbildung zeigt den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $f_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $(4|f_{\frac{1}{2}}(4))$.



a) Geben Sie anhand der Abbildung eine Gleichung der Tangente t an.

b) Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0| - f_a(u))$ schneidet.

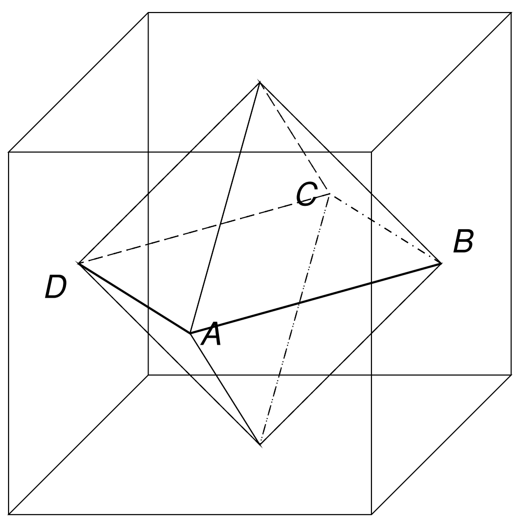
Aufgabe 6:
Die Abbildung zeigt die Graphen einer Funktion f sowie ihrer Umkehrfunktion $\overline{f}$. F ist eine Stammfunktion von f. Die Punkte P(4|2) und Q(6|3) liegen auf dem Graphen von $\overline{f}$. Begründen Sie mithilfe geeigneter Eintragungen in der Abbildung, dass der Inhalt der markierten Fläche durch $10 - (F(3) - F(2))$ berechnet werden kann.



Aufgabe 7:
Die Mittelpunkte der Seitenflächen eines Würfels sind die Eckpunkte eines Oktaeders (vgl. Abbildung). Die Eckpunkte $A(1|2|1)$, B, $C(-3|-6|9)$ und D des Oktaeders liegen in der Ebene H mit der Gleichung $2x_1 + x_2 + 2x_3 = 6$.

a) Weisen Sie nach, dass die Kantenlänge des Würfels 12 beträgt.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten eines der beiden Eckpunkte des Oktaeders, die nicht in H liegen.



Aufgabe 8:
Gegeben ist die Schar der Geraden

$$g_k\colon \vec{x} = \begin{pmatrix} k \\ -4k \\ k \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ mit } \mu \in \mathbb{R} \text{ und } k \in \mathbb{R}.$$

a) Begründen Sie, dass alle Geraden der Schar parallel zueinander sind.

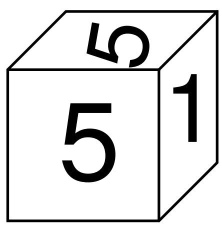
b) Betrachtet wird das Quadrat mit folgenden Eigenschaften:

   (i) Die Punkte O(0|0|0) und P(11|4|5) sind Eckpunkte des Quadrats.

   (ii) Zwei Seiten des Quadrats liegen auf Geraden der Schar.

   Weisen Sie nach, dass *O* und *P* keine benachbarten Eckpunkte dieses Quadrats sind.

Aufgabe 9:
Die drei nicht sichtbaren Seiten des abgebildeten Würfels sollen jeweils mit einer der Zahlen 3, 4, 5 oder 6 beschriftet werden. Dabei können Zahlen auch mehrfach verwendet werden.



Nach der Beschriftung soll der Würfel folgende Eigenschaften haben:

- Beim einmaligen Werfen ist der Erwartungswert für die erzielte Zahl gleich 4.
- Auf den sechs Seiten des Würfels kommen genau drei verschiedene Zahlen vor.
- Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass beim zweimaligen Werfen des Würfels zweimal die gleiche Zahl erzielt wird, beträgt $\frac{1}{2}$.

Untersuchen Sie, ob es möglich ist, die nicht sichtbaren Seiten des Würfels so zu beschriften, dass er alle drei Eigenschaften besitzt.

Aufgabe 10:
Bei einem Zufallsexperiment gilt für zwei Ereignisse A und B:

- $P(A \cap B) = 3x$ mit $x > 0$
- $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A} \cap \overline{B})$
- $P_B(A) = \dfrac{3}{4}$

Stellen Sie den beschriebenen Zusammenhang in einer vollständig ausgefüllten Vierfeldertafel dar und begründen Sie, dass $x \leq \frac{1}{5}$ gelten muss.

1.1.2 Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen als **Hilfsmittel** verwendet werden:

- **Wissenschaftlicher Taschenrechner** (WTR):
  Der im Kurs eingeführte, den Vorgaben des Kultusministeriums entsprechende wissenschaftliche Taschenrechner ohne mitgeliefertes Handbuch oder andere Anleitung.
- **Formelsammlung**:
  Das „Dokument mit mathematischen Formeln“ des Instituts zur Qualitätsentwicklung im Bildungswesen (IQB).
- **Geodreieck und Zirkel**:
  Diese gelten nicht als Hilfsmittel im obigen Sinne und sind daher durchgehend erlaubt.
- **Nachschlagewerk zur deutschen Rechtschreibung**:
  Ebenfalls während der gesamten Prüfung zugelassen.

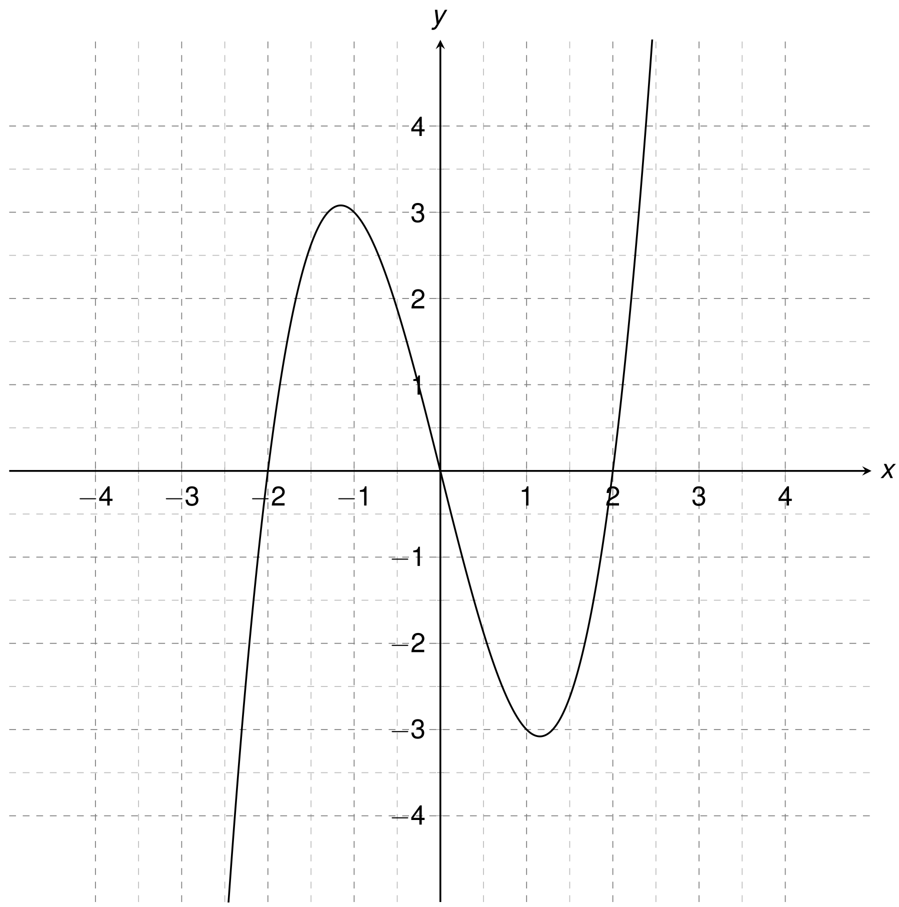
Weiterhin gilt:

- Maximal zu erreichende Punkte: 70 Bewertungseinheiten (BE)
- Maximale Bearbeitungszeit: 300 Minuten
- Übersicht zur **Punkteverteilung** und **Tracking** deines Fortschritts:

Thema	Aufgabe	Teilaufgabe	Punkte	Erledigt?
	1	a)	2	
		b)	6	
		c)	7	
		d)	7	
		e)	4	
	2	a)	3	
		b)	3	
		c)	3	
		d)	5	
Analysis Geometrie	1	a)	4	
		b)	3	
		c)	3	
		d)	5	
		e)	1	
		f)	4	
		g)	2	
		h)	3	
Stochastik	1	a)	3	
		b)	3	
		c)	4	
		d)	2	
		e)	4	
		f)	4	
		g)	2	
		g)	3	

Analysis

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen $f_{a,b}$ durch $f_{a,b}(x) = ax^3 - bx$ mit $a, b \in \mathbb{R}^+$. Die Abbildung zeigt den Graphen einer der Funktionen der Schar.



a) Begründen Sie, dass jeder Graph der Schar symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.

b) Weisen Sie in Abhängigkeit von a und b nach, dass der Graph von $f_{a,b}$ einen Tiefpunkt mit der x-Koordinate $\sqrt{\frac{b}{3a}}$ hat. Begründen Sie, dass er zudem einen Hochpunkt besitzt und dass dieser eine kleinere x-Koordinate hat als der Tiefpunkt.

c) Es gibt eine Funktion der Schar, die bei $x = 3$ eine Nullstelle hat und deren Graph im vierten Quadranten mit der x-Achse ein Flächenstück mit dem Inhalt 40,5 einschließt. Bestimmen Sie die zugehörigen Werte von a und b.

Die Funktion der Schar, deren Graph in der Abbildung dargestellt ist, wird mit f bezeichnet; ihr Funktionsterm ist $f(x) = x^3 - 4x$.

d) Die Tangente an den Graphen von f im Punkt $A(2|0)$, die x-Achse und die Gerade g mit der Gleichung $y = -x - 2$ schließen ein Dreieck ein. Berechnen Sie seinen Flächeninhalt.

d) Begründen Sie, dass die folgende Aussage richtig ist:

Ist P ein beliebiger Punkt auf dem Graphen von f, so liegt der Mittelpunkt der Verbindungsstrecke von P und dem Koordinatenursprung auf dem Graphen der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion h mit $h(x) = 4x^3 - 4x$.

Aufgabe 2:
Die Leitung eines großen Unternehmens versendet jeden Arbeitstag um 7:00 Uhr eine E-Mail mit tagesaktuellen Informationen an alle Mitarbeiterinnen und Mitarbeiter. Diese wurden gebeten, nach dem Lesen der E-Mail eine Lesebestätigung zu versenden.

Die folgende Tabelle zeigt für einen bestimmten Tag, wie viele Lesebestätigungen bei der Leitung des Unternehmens bis zum jeweiligen Zeitpunkt bereits eingegangen sind.

Zeitpunkt	7:30	8:00	8:30	9:00	9:30	10:00	...	14:30	15:00
Anzahl der bis dahin eingegangenen Lesebestätigungen	252	899	1701	2627	3503	4364	...	7552	7572

Beispielsweise sind von 7:00 Uhr bis 10:00 Uhr 4364 Lesebestätigungen eingegangen.

a) Ermitteln Sie mithilfe der Tabelle für den betrachteten Tag, wie viele Lesebestätigungen im Zeitraum von 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr im Mittel pro Stunde eingegangen sind.

Auf der Grundlage der über viele Tage erfassten Lesebestätigungen wurde mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen u mit $u(x) = 100x^3 - 900x^2 + 2300x$ und v mit $v(x) = 20x^2 - 520x + 2880$ die Funktion k entwickelt:

$$k(x) = \begin{cases} u(x) & \text{für } 0 \leq x < 3 \\ v(x) & \text{für } 3 \leq x \leq 8 \end{cases}$$

Die Funktion k beschreibt modellhaft für einen Zeitraum von acht Stunden eines Arbeitstages die zeitliche Entwicklung der momentanen Änderungsrate der Anzahl der eingegangenen Lesebestätigungen. Dabei ist x die seit 7:00 Uhr vergangene Zeit in Stunden und $k(x)$ die momentane Änderungsrate der Anzahl der seit 7:00 Uhr eingegangenen Lesebestätigungen in der Einheit $\frac{1}{h}$.

b) Berechnen Sie $k(2)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang.

c) Es gilt:

$$v(x) = 20 \cdot (x - 18) \cdot (x - 8)$$

Begründen Sie, dass die Funktion v nicht geeignet ist, die momentane Änderungsrate auch für den Zeitraum nach 15:00 Uhr zu beschreiben.

d) Berechnen Sie mithilfe der Funktion k die Anzahl der im Zeitraum von 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr eines Arbeitstages eingegangenen Lesebestätigungen.

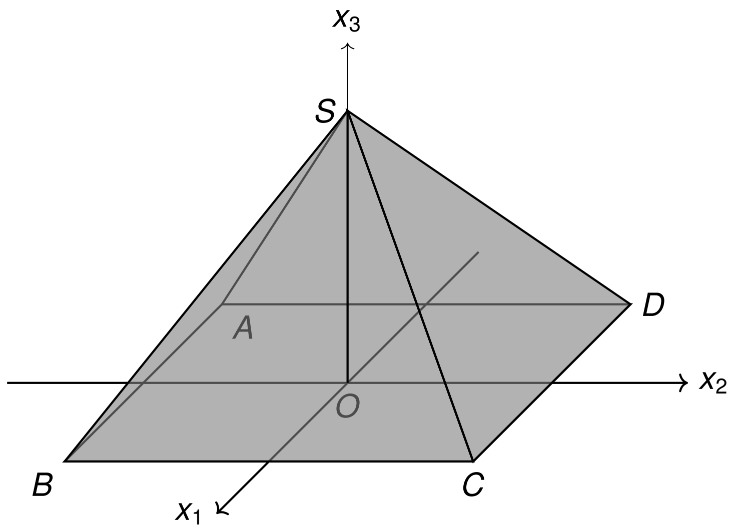
Ermitteln Sie, um wie viel Prozent diese auf der Grundlage des Modells berechnete Anzahl von der entsprechenden Anzahl des eingangs betrachteten Tages (vgl. Tabelle) abweicht.

Geometrie

Aufgabe 1:
Abbildung 1 zeigt die Pyramide *ABCDS* mit den Eckpunkten

- $A(-3|-3|0)$,
- $B(3|-3|0)$,
- $C(3|3|0)$,
- $D(-3|3|0)$ und
- $S(0|0|4)$ sowie den Punkt
- $O(0|0|0)$,

der in der quadratischen Grundfläche der Pyramide liegt. Die Seitenfläche *CDS* der Pyramide liegt in der Ebene *E*.



a) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche der Pyramide.

b) Genau eine der folgenden Gleichungen (1) bis (3) beschreibt eine Symmetrieebene der Pyramide. Geben Sie diese Gleichung an und begründen Sie für eine der anderen Gleichungen, dass die durch sie beschriebene Ebene keine Symmetrieebene der Pyramide ist.

$$\begin{aligned}
\text{(I):} \quad x_1 - x_3 &= 0 \\
\text{(II):} \quad x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
\text{(III):} \quad x_1 + x_2 &= 0
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.

[zur Kontrolle: $4x_2 + 3x_3 = 12$]

d) Es gibt einen Punkt $P(0|0|p)$, der im Innern der Pyramide liegt und von allen vier Seitenflächen sowie der Grundfläche der Pyramide den gleichen Abstand hat. Mithilfe des folgenden Gleichungssystems lässt sich der Wert von p bestimmen:

$$\begin{aligned} \text{(I):} \quad & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} &= \overrightarrow{OQ} \\ \text{(II):} \quad & 4 \cdot 4t + 3 \cdot (p + 3t) &= 12 \\ \text{(III):} \quad & |\overrightarrow{PQ}| &= p \end{aligned}$$

Erläutern Sie die Überlegungen im geometrischen Zusammenhang, die diesem Vorgehen zur Bestimmung des Werts von p zugrunde liegen.

Die Ebene E gehört zur Schar der Ebenen

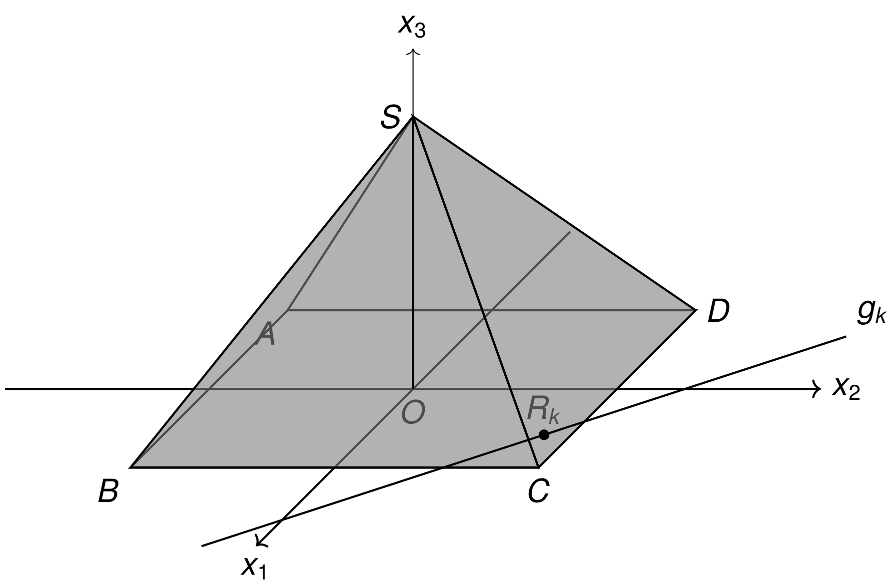
$$E_k : 4k \cdot x_1 + 4\sqrt{1 - k^2} \cdot x_2 + 3x_3 = 12 \text{ mit } k \in [-1; 1].$$

Die Seitenfläche ADS der Pyramide liegt in der Ebene E_{-1} der Schar, die Seitenfläche BCS in der Ebene E_1.

e) Zeigen Sie, dass der Punkt S in allen Ebenen der Schar enthalten ist.

f) Weisen Sie nach, dass die Größe des Winkels, unter dem die Gerade OS die Ebene E_k schneidet, unabhängig von k ist.

Jede Ebene E_k der Schar schneidet die x_1x_2-Ebene in einer Gerade g_k. Mit R_k wird jeweils derjenige Punkt auf g_k bezeichnet, der von O den kleinsten Abstand hat. In der nachfolgenden Abbildung in der Anlage sind g_k und R_k beispielhaft für eine Ebene E_k der Schar dargestellt.



g) Zeichnen Sie die Punkte R_{-1} und R_1 in diese Abbildung in der Anlage ein.

h) Durchläuft k alle Werte von -1 bis 1, dann dreht sich die Fläche OR_kS um die Strecke $\overline{OS}$. Dabei entsteht ein Körper. Beschreiben Sie die Form des entstehenden Körpers und bestimmen Sie das Volumen dieses Körpers.

Stochastik

Aufgabe 1:
Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

a) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.

b) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.

c) Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mehr als fünf Personen älter als 40 Jahre sind.

Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb. Im Anschluss soll die Nullhypothese

„Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.“

mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

d) Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.

Für den beschriebenen Test ergibt sich $\{132; 133; \ldots; 200\}$ als der Ablehnungsbereich der Nullhypothese.

e) Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:

- Y: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
- $P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0{,}047$

Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.

f) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 90 % betragen könnte.

Zur Anmeldung auf der Webseite des Streamingdiensts ist ein persönliches Kennwort erforderlich. Für das Kennwort können 80 verschiedene Zeichen verwendet werden: je 26 Groß- und Kleinbuchstaben, 10 Ziffern sowie 18 Sonderzeichen.

g) Einige Abonnenten verwenden ein Kennwort, das genau acht Zeichen lang ist und nur aus Kleinbuchstaben besteht. Dabei können Zeichen mehrfach vorkommen. Zeigen Sie, dass für diese Abonnenten weniger als ein Tausendstel aller möglichen Kennwörter infrage kommen, die aus genau acht Zeichen bestehen.

h) Niclas beschließt ein Kennwort zu wählen, das die beiden folgenden Bedingungen erfüllt:

   - Es besteht aus genau acht Zeichen, die untereinander verschieden sind.
   - Die Buchstaben seines Namens sind in der korrekten Reihenfolge und unter Berücksichtigung der Groß- und Kleinschreibung enthalten.

   Damit sind beispielsweise *Nic4+las* oder *nNicl*as* mögliche Kennwörter. Bestimmen Sie die Anzahl aller derartigen Kennwörter.

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

zu Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion f und deren Graph G_f im Intervall $[-2; 8]$.

a) Wir beurteilen mithilfe der Abbildung, ob der angegebene Intergralwert negativ ist. Ein Integralwert ergibt sich als die Summe der Flächeninhalte zwischen dem Graphen (hier: f) und der x-Achse. Dabei ergeben Flächenstücke oberhalb der x-Achse einen positiven und unterhalb der x-Achse einen negativen Wert. In dem Intervall $[-2; 8]$ ist das Flächenstück oberhalb der x-Achse größer, als die Summe der Inhalte der beiden unterhalb der x-Achse eingeschlossenen Flächen. Deshalb ist der Wert des Integrals nicht negativ.

Integralwert als Flächeninhalt

b) Die Punkte $(-1|-1)$ und $(1|1)$ liegen auf der ersten Winkelhalbierenden $y = x$, welche die Steigung $m = 1$ hat und durch den Ursprung verläuft.

Mithilfe der Kettenregel erhalten wir die Ableitung von f:

$$f'(x) = 2 \cdot \cos\left(\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$$

Ableiten mit Kettenregel

Da $f'(x) = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ ist und der Ableitungswert (1. Ableitung = Steigung) an der Stelle $x = 0$ ebenfalls $f'(0) = \cos(0) = 1$ ist, verläuft der Graph von f durch den Ursprung und die Tangente an G_f hat im Koordinatenursprung die Steigung 1.

Die Aussage trifft somit zu.

---

zu Aufgabe 2:
Gegeben ist die Funktion $f(x) = e^{2x-1}$.

a) Da wir $x = 0$ in die Funktion einsetzen können, existiert ein Schnittpunkt mit der y-Achse und somit ist dies der gesuchte Schnittpunkt: $S(0|e^{-1})$.

Für $x \to \infty$ gilt $f(x) \to \infty$ und für $x \to -\infty$ gilt $f(x) \to 0$. Deswegen besitzt der Graph von f die waagerechte Asymptote $y = 0$.

Grenzwert für e^x

b) Die Graphen zweier Funktionen g und f schneiden sich an einer Stelle x_0 orthogonal (= im rechten Winkel), wenn $g(x_0) = f(x_0)$ und $g'(x_0) \cdot f'(x_0) = -1$ gilt.

Die Funktionswerte von g und f an der Stelle $x_0 = \dfrac{1}{2}$ sind identisch, denn:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = e^{2\cdot\frac{1}{2}-1} = e^0 = 1 \quad \text{und} \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = e^{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}} = e^0 = 1$$

Mithilfe der Kettenregel erhalten wir:

$$f'(x) = \left(e^{2x-1}\right)' = 2 \cdot e^{2x-1}$$

Setzen wir anschließend $x_0 = \frac{1}{2}$, folgt:

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot e^{2 \cdot \frac{1}{2} - 1} = 2 \cdot e^0 = 2$$

In der Aufgabenstellung ist der Wert $g'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$ angegeben.

Da

$$g'\left(\frac{1}{2}\right) \cdot f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \cdot 2 = -1$$

ist, schneiden sich G_f und G_g orthogonal im Punkt $\left(\frac{1}{2}|1\right)$.

---

zu Aufgabe 3:

Gegeben ist die Ebenenschar E_a durch $E_a : 2ax_1 - 4x_2 + (a-2)x_3 = 12; a \in \mathbb{R}$.

a) Die Gerade verläuft genau dann parallel zur Ebene, wenn die Gerade senkrecht zu den Normalenvektoren der Ebene verläuft.

Ein Normelenvektor von E_a lässt sich direkt anhand der Koeffizienten der Koordinatenform aufstellen.

Normalenvektor:

$$\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix}$$

Richtungsvektor der Geraden:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Um zu prüfen, ob diese beiden Vektoren senkrecht verlaufen, prüfen wir ob das Skalarprodukt den Wert 0 ergibt. Es gilt:

$$\begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2a + a - 2 = 0 \Leftrightarrow a = -2$$

Lage Ebene <> Gerade

Für $a = -2$ verläuft die Ebene parallel zur gegebenen Geraden.

b) Die Ebene gehört genau dann zur Schar, wenn es einen Wert $a \in \mathbb{R}$ existiert, sodass es ein Vielfaches der Ebene gibt mit $E_a = k \cdot E$.

Der konstante Wert der Schar beträgt 12. Die Ebene E hat einen doppelt so hohen konstanten Wert von 24. Wir multiplizieren daher zunächst die Gleichung der Schar mit 2 und erhalten:

$$E_a : 4ax_1 - 8x_2 + 2(a-2) \cdot x_3 = 24$$

Damit die Ebene ein Teil der Schar ist, muss $4a = 6$ und somit $a = \frac{3}{2}$ herauskommen. Setzen wir dieses a noch in den Koeffizienten von x_3 ein, erhalten wir:

$$2 \cdot \left(\frac{3}{2} - 2\right) = -1$$

Der Koeffizient der Ebene ist aber 1 und somit ist E kein Teil der Schar E_a.

---

zu Aufgabe 4:
Betrachtet wird die Wahrscheinlichkeitsverteilung beim Glücksrad.

a) Unabhängig davon, welche Farbe unsere Zufallsvariable repräsentiert, wird das Glücksrad 100-mal gedreht und daher ist $n = 100$.

Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt die Anzahl, wie oft die Farbe „Blau" erzielt wird.

Ist p die Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Drehung des Glücksrads die Farbe „Blau" zu erzielen, so gilt für die Standardabweichung σ_X:

$$\sigma_X = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Standard-abweichung

Die binomialverteilte Zufallsgröße Y beschreibt die Anzahl, wie oft die Farbe „Gelb" erzielt wird. Da auf dem Glücksrad nur zwei Farben sind, ist die Wahrscheinlichkeit von Y die Gegenwahrscheinlichkeit zu X.

Deshalb gilt für die Standardabweichung von Y:

$$\sigma_Y = \sqrt{n \cdot (1 - p) \cdot (1 - (1 - p))} = \sqrt{n \cdot (1 - p) \cdot p} = \sigma_X$$

Da in der Formel der Standardabweichung sowohl die Wahrscheinlichkeit, als auch die Gegenwahrscheinlichkeit vorkommt, erhalten wir identische Standardabweichungen.

b) Ist der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße X ganzzahlig, so nimmt die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung ihr Maximum beim Erwartungswert an. Der Abbildung ist zu entnehmen, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilung ihr Maximum bei 75 annimmt. Nach Voraussetzung ist der Erwartungswert von X ganzzahlig, somit gilt:

$$\mu_X = n \cdot p = 75$$

Das Glücksrad wird 100-mal gedreht, daher ist $n = 100$ und folglich:

$$100 \cdot p = 75 \Leftrightarrow p = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$$

Das Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die entweder blau oder gelb gefärbt sind. Der Anteil der blau gefärbten Sektoren entspricht der

Wahrscheinlichkeit dafür, bei einer Drehung des Glücksrads die Farbe „Blau" zu erzielen. Bezeichnet man die Anzahl der blau gefärbten Sektoren mit k, so gilt:

$$p = \frac{3}{4} = \frac{k}{20} \;\Big|\; \cdot 20 \qquad \text{und} \qquad k = 20 \cdot \frac{3}{4} = 15$$

Die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads beträgt 15.

Info:
Du hättest in der Prüfung nur 2 der folgenden 6 Aufgaben bearbeiten müssen.

zu Aufgabe 5:
Gegeben ist eine Tangente t und eine Funktionenschar f_a.

a) Wir bestimmen anhand der Abbildung die Tangentengleichung. Die Tangente t verläuft durch die Punkte $(0|-8)$ und $(4|8)$ und hat somit die Steigung:

Tangenten-gleichung

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8-(-8)}{4-0} = \frac{16}{4} = 4$$

Der y-Achsenabschnitt liegt bei $b = -8$.

Die Gleichung der Tangente t lautet daher $y = 4x - 8$.

b) Wir untersuchen die Funktionenschar $f_a(x)$. Für den Funktionswert von f_a an der Stelle u gilt:

$$f_a(u) = au^2$$

Die Ableitung der Funktion ist:

Ableiten mit Potenzregel

$$f'_a(x) = 2ax$$

Damit hat die Tangente an den Graphen von f_a im Punkt $(u|au^2)$ die Steigung:

$$f'_a(u) = 2au$$

Mit der Punkt-Steigungsform der Tangente:

$$y = 2au \cdot x + c$$

Für den y-Achsenabschnitt c gilt durch Einsetzen des Punktes $(u|au^2)$:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad au^2 &= 2au \cdot u + c \\ \Leftrightarrow \quad c &= au^2 - 2au^2 \\ \Leftrightarrow \quad c &= -au^2 \end{aligned}$$

Wenn wir jetzt noch den Funktionswert $f_a(u)$ mit -1 multiplizieren, erhalten wir:

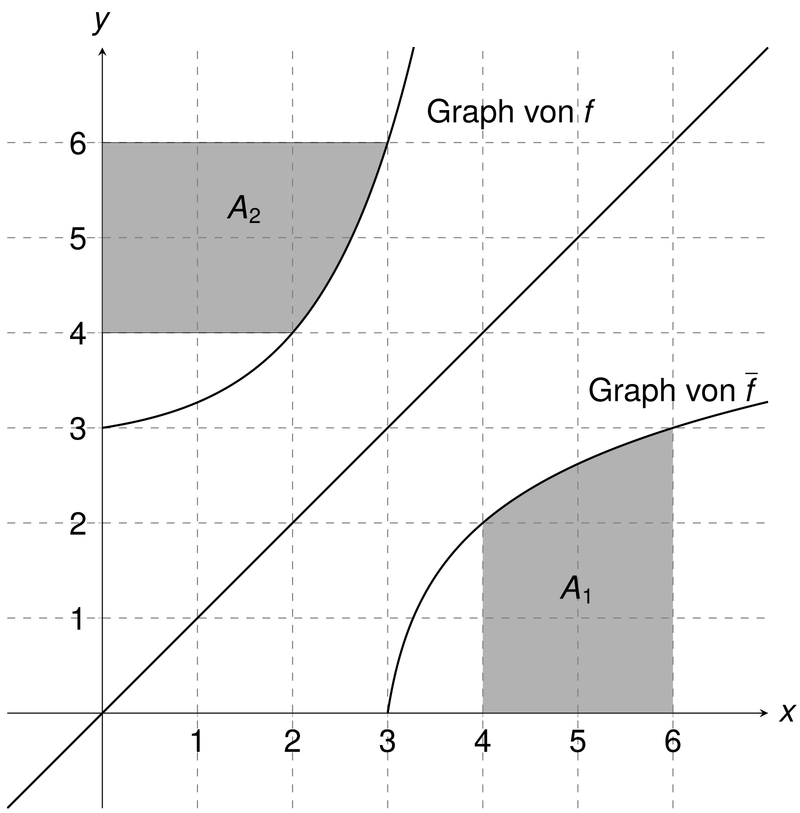
$$-f_a(u) = -au^2$$

Dieser Wert ist für jedes $u \in \mathbb{R}$ identisch mit dem y-Achsenabschnitt der Tangente.

Die Tangente $y = 2au \cdot x - au^2$ an den Graphen von f_a im Punkt $(u|f_a(u))$ schneidet für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die y-Achse im Punkt $(0| - f_a(u))$.

---

zu Aufgabe 6:
Gegeben sind der Graph der Umkehrfunktion $\overline{f}$ und der Graph von f sowie die markierten Flächen A_1 und A_2.



Die Graphen verlaufen symmetrisch bezüglich der ersten Winkelhalbierenden $y = x$. Deshalb haben die beiden markierten Flächen A_1 und A_2 den gleichen Inhalt.

Der Inhalt der Fläche A_2 setzt sich wie folgt zusammen:

Integralwert als Flächeninhalt

1. Ein Quadrat mit der Seitenlänge 2 im $[0; 2]$, also:

$$A_{\text{Quadrat}} = 2 \cdot 2 = 4$$

2. Die Fläche zwischen der Geraden $y = 6$ und dem Graphen von f im Intervall $[2; 3]$:

$$A_{\text{Differenz}} = \int_2^3 (6 - f(x))\,\mathrm{d}x$$

3. Somit gilt für den Gesamtflächeninhalt:

$$A_2 = 2 \cdot 2 + \int_2^3 (6 - f(x))\,\mathrm{d}x$$

Wegen der Linearität des bestimmten Integrals

$$\int_a^b (g(x) + h(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x$$

können wir schreiben:

$$A_2 = 4 + \int_2^3 6\,\mathrm{d}x - \int_2^3 f(x)\,\mathrm{d}x$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und der Stammfunktion F von f ergibt sich:

$$A_2 = 4 + 6 - (F(3) - F(2)) = 10 - (F(3) - F(2))$$

Aufgrund der Symmetrie zur ersten Winkelhalbierenden gilt:

$$A_1 = A_2 = 10 - (F(3) - F(2))$$

Bemerkung: Die konkrete Berechnung des Flächeninhalts ist ohne Kenntnis der Funktion f und ihrer Stammfunktion F nicht möglich. Die Gleichheit der Flächeninhalte A_1 und A_2 ist jedoch aufgrund der Symmetrie zur ersten Winkelhalbierenden gesichert.

---

zu Aufgabe 7:
Gegeben ist ein Würfel mit einem enthaltenen Oktaeder.

a) Bestimmung der Kantenlänge des Würfels:

Da die Eckpunkte des Oktaeders die Mittelpunkte der Seitenflächen des Würfels sind, entspricht die Kantenlänge des Würfels dem Abstand der beiden Punkte $A(1|2|1)$ und $C(-3|-6|9)$.

Länge eines Vektors

Berechnung der Länge des Verbindungsvektors $\overrightarrow{AC}$:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{AC}| &= \sqrt{(-3-1)^2 + (-6-2)^2 + (9-1)^2}\\ &= \sqrt{(-4)^2 + (-8)^2 + 8^2}\\ &= \sqrt{16 + 64 + 64} = \sqrt{144} = 12\end{aligned}$$

Die Kantenlänge des Würfels beträgt also 12 Längeneinheiten.

b) Bestimmung weiterer Eckpunkte:

Zunächst bestimmen wir den Mittelpunkt M_{AC} der Strecke $\overline{AC}$:

Mittelpunkt bestimmen

$$M_{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die weiteren Eckpunkte liegen auf der zur Ebene H senkrechten Geraden durch M_{AC}. Ein Richtungsvektor dieser Geraden ist der Normalenvektor

$$\vec{n}_H = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ der Ebene } H.$$

Geradengleichung durch M_{AC} in Richtung $\vec{n}_H$:

$$\vec{x} = \overrightarrow{OM}_{AC} + r \cdot \vec{n}_H = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ r \in \mathbb{R}$$

Die Länge des Richtungsvektors $\vec{n}_H$ beträgt:

$$|\vec{n}_H| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

Die neuen Eckpunkte haben von M_{AC} den Abstand 6. Da $|\vec{n}_H| = 3$, muss $r = \pm 2$ sein.

Für $r = 2$ ergibt sich der erste gesuchte Eckpunkt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Also: $(3|0|9)$

Für $r = -2$ ergibt sich der zweite gesuchte Eckpunkt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Also: $(-5|-4|1)$

zu Aufgabe 8:
Betrachtet wird eine Geradenschar g_k mit dem Richtungsvektor $\vec{r}$.

a) Parallelität der Geradenschar:

Der angegebene Richtungsvektor

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$$

von g_k hängt nicht vom Parameter k ab. Dies bedeutet, dass alle Geraden der Schar dieselbe Richtung haben und somit parallel zueinander sind.

b) Untersuchung der möglichen Quadrat-Eckpunkte:

Es sind zwei Fälle zu untersuchen:

- Fall 1: O und P liegen auf derselben Geraden g_k
  In diesem Fall müsste der Vektor $\overrightarrow{OP}$ kollinear zum Richtungsvektor $\vec{r}$ sein. Dies führt zum linearen Gleichungssystem:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{rcl} 11 & = & 4t \\ 4 & = & 8t \\ 5 & = & t \end{array}$$

  Dieses Gleichungssystem hat keine Lösung, da die Gleichungen widersprüchlich sind.

- Fall 2: O und P liegen auf verschiedenen Geraden g_k In diesem Fall müssten $\overrightarrow{OP}$ und $\vec{r}$ orthogonal sein, da zwei Seiten des Quadrats auf Geraden der Schar liegen müssten.
  Überprüfung mittels Skalarprodukt:

$$\overrightarrow{OP} \bullet \vec{r} = \begin{pmatrix} 11 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix} = 44 + 32 + 5 = 81 \neq 0$$

  Da das Skalarprodukt nicht Null ist, sind die Vektoren nicht orthogonal.

Da beide Fälle nicht eintreten können, können O und P keine benachbarten Eckpunkte des gesuchten Quadrats sein.

zu Aufgabe 9:
Untersucht wird ein Würfel mit speziellen Eigenschaften.

Analyse der sichtbaren Seiten und Bestimmung der möglichen Beschriftungen:

Der Abbildung entnimmt man, dass die drei sichtbaren Seiten des Würfels mit den Zahlen 1, 5 und 5 beschriftet sind.

- Da beim einmaligen Werfen alle Seiten die gleiche Wahrscheinlichkeit haben und der Erwartungswert 4 betragen soll, muss gelten:

  $$\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6}{6} = 4$$

  Daraus folgt für die Summe aller Zahlen:

  $$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 24$$

- Die Summe der sichtbaren Zahlen beträgt:

  $$1 + 5 + 5 = 11$$

  Also muss für die Summe der drei nicht sichtbaren Zahlen gelten:

  $$24 - 11 = 13$$

- Mit der zweiten Eigenschaft kommen nur zwei Möglichkeiten infrage:

  Fall 1: Die drei nicht sichtbaren Seiten sind mit 4, 4 und 5 beschriftet
  Fall 2: Die drei nicht sichtbaren Seiten sind mit 3, 5 und 5 beschriftet

- Berechnung der Wahrscheinlichkeiten:
  - Fall 1 (1, 4, 4, 5, 5, 5):

    $$P((1;1)) + P((4;4)) + P((5;5)) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{2}{6}\right)^2 + \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{14}{36} \neq \frac{1}{2}$$

  - Fall 2 (1, 3, 5, 5, 5, 5):

    $$P((1;1)) + P((3;3)) + P((5;5)) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

Fazit: Beschriftet man die nicht sichtbaren Seiten des Würfels mit den Zahlen 3, 5 und 5, so besitzt er alle drei geforderten Eigenschaften:

- Die Summe aller Zahlen ist 24 (Erwartungswert 4).
- Die Summe der nicht sichtbaren Zahlen ist 13.
- Die Wahrscheinlichkeit für zweimal die gleiche Zahl beträgt $\frac{1}{2}$.

zu Aufgabe 10:
Bekannt sind die Daten $P(A \cap B) = 3x$ und $P_B(A) = \frac{3}{4}$. Wir nutzen die Zusammenhänge und können schreiben:

Vierfelder-tafel

1. $P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{3x}{P(B)} \Rightarrow P(B) = 4x$
2. $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \Rightarrow P(\overline{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B) = 4x - 3x = x$
3. $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P(\overline{A} \cap B) = x$

Mit Hilfe dieser Daten können wir eine vollständige Vierfeldertafel entwickeln:

	B	$\overline{B}$	Σ
A	$3x$	$1-5x$	$1-2x$
$\overline{A}$	x	x	$2x$
Σ	$4x$	$1-4x$	1

Da alle Wahrscheinlichkeiten nicht negativ sein können, muss gelten:

$$3x \geq 0 \text{ und } 1-5x \geq 0 \text{ und } x \geq 0 \text{ und } 1-4x \geq 0$$

Der kritische Wert ergibt sich aus $1-5x \geq 0$:

$$1-5x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{5}$$

Da für $x = \frac{1}{5}$ der Term $1-5x$ gleich null wird und alle anderen Einträge für $0 \leq x \leq \frac{1}{5}$ nicht negativ sind, ist $\frac{1}{5}$ die obere Grenze für x.

Empfehlung zur Wahl der Abitur-Aufgaben (Teil A)

Liebe Schülerin, lieber Schüler,

du hast im Wahlteil A des Mathematik-Abiturs die Möglichkeit, aus sechs Aufgaben (Aufgabe 5 bis 10) zwei Aufgaben auszuwählen. Um dir die Entscheidung zu erleichtern, haben wir eine Analyse dieser Aufgaben vorgenommen und sie nach Thema, benötigten Kenntnissen und Schwierigkeit bewertet.

Wie solltest du deine Aufgaben wählen?

- **Fokus auf Analysis?**
  Dann solltest du vorrangig Aufgaben wählen, die sich mit Differential- oder Integralrechnung beschäftigen.
- **Stärken in Geometrie oder Stochastik?**
  Falls du dich mit räumlicher Geometrie oder Wahrscheinlichkeitsrechnung sicher fühlst, könnten auch diese Aufgaben für dich infrage kommen.
- **Zeitmanagement beachten!**
  Wähle Aufgaben, bei denen du nicht nur das Thema verstehst, sondern sie auch zügig lösen kannst.

Kurzbewertung der sechs Aufgaben von leicht bis schwer:

- Aufgabe 5 (Differentialrechnung, Tangentengleichung) – Einfach bis Mittel
- Aufgabe 6 (Integralrechnung, Flächenberechnung) – Mittel
- Aufgabe 9 (Stochastik, Erwartungswert) – Mittel
- Aufgabe 10 (Stochastik, bedingte Wahrscheinlichkeit) – Mittel bis Hoch
- Aufgabe 7 (Geometrie, Ebenengleichung & Oktaeder) – Hoch
- Aufgabe 8 (Geometrie, Parameterform & Parallelität von Geraden) – Hoch

Empfohlene Wahl für Schüler mit Fokus auf Analysis (trifft auf die meisten zu)

- Beste Wahl: Aufgabe 5 und 6, da sie sich mit Analysis beschäftigen (Tangentengleichung und Integralrechnung).
- Alternative: Falls du dich für Stochastik interessierst, könnte Aufgabe 9 oder 10 eine Option sein.
- Weniger empfehlenswert: Aufgaben 7 und 8, da sie sich auf Geometrie im Raum konzentrieren.
- Denke daran: Wähle die Aufgaben, mit denen du dich sicher fühlst, und nutze deine Stärken bestmöglich aus!

1.2.2 Prüfungsteil B

Analysis

zu Aufgabe 1:
Untersuchung der Funktionenschar $f_{a;b}$.

a) Eine Funktion ist genau dann punktsymmetrisch, wenn gilt:

Punkt-
symmetrie

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \quad \begin{aligned} f(-x) &= a\cdot(-x)^3 - b\cdot(-x) \\ &= -ax^3 + bx \\ &= -(ax^3 - bx) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Die Schar ist daher punktsymmetrisch bzgl. des Koordinatenursprungs.

b) Wir bestimmen die Ableitungen der Funktionenschar mit Hilfe der Potenzregel:

$$\begin{aligned} f_{a;b}(x) &= ax^3 - bx \\ f'_{a;b}(x) &= 3ax^2 - b \\ f''_{a;b}(x) &= 6ax \end{aligned}$$

Setzen wir $x = \sqrt{\frac{b}{3a}}$ in die erste Ableitung ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned} f'_{a;b}\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) &= 3a\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)^2 - b \\ &= 3a\frac{b}{3a} - b \\ &= b - b \\ &= 0 \end{aligned}$$

Somit ist $x = \sqrt{\frac{b}{3a}}$ eine Nullstelle der ersten Ableitung und die notwendige Bedingung ist erfüllt. Für die hinreichende Bedingung für einen Tiefpunkt, muss $x = \sqrt{\frac{b}{3a}}$ eingesetzt in die zweite Ableitung einen positiven Wert ergeben. Es ist

Tiefpunkt

$$f''_{a;b}\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) = 6a\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right)$$

Nun sind a und b selbst positiv und somit ist auch $f''_{a;b}\left(\sqrt{\frac{b}{3a}}\right) > 0$ und es liegt tatsächlich ein Tiefpunkt vor.

Da die Funktion symmetrisch ist, muss wenn bei x_0 ein Extremum vorliegt, bei $-x_0$ ebenfalls ein Extremum vorliegen. Bei Punktsymmetrie sind dies unterschiedliche Extrema.

Wir haben gesehen, dass bei $x_0 = \sqrt{\frac{b}{3a}}$ ein Tiefpunkt vorliegt, somit muss bei $-x_0 = -\sqrt{\frac{b}{3a}}$. Da x_0 positiv ist, ist $-x_0$ negativ und es gilt $-x_0 < x_0$.

c) Da $x = 3$ eine Nullstelle sein soll, setzen wir dies in unsere allgemeine Funktionsgleichung ein, um eine erste Beziehung zwischen a und b zu erhalten:

$$\begin{array}{rrcll} & ax^3 - bx & = & 0 & \\ \Rightarrow & a \cdot 3^3 - b \cdot 3 & = & 0 & \\ \Rightarrow & 27a - 3b & = & 0 & \mid +3b \\ \Rightarrow & 27a & = & 3b & \mid \div 3 \\ \Rightarrow & 9a & = & b & \end{array}$$

Nun wird im vierten Quadranten eine Fläche von 40,5 FE eingeschlossen. Da der vierte Quadrant unterhalb der x-Achse liegt, ist der Flächeninhalt negativ. Es folgt

Quadranten

$$\begin{array}{rrcll} & \int_0^3 ax^3 - bx\,\mathrm{d}x & = & -40{,}5 & \\ \Rightarrow & \frac{a}{4}x^4 - \frac{b}{2}x^2\Big|_0^3 & = & -40{,}5 & \\ \Rightarrow & \frac{81}{4}a - \frac{9}{2}b & = & -40{,}5 & \mid b = 9a \\ \Rightarrow & \frac{81}{4}a - \frac{27}{2}(9a) & = & -40{,}5 & \\ \Rightarrow & \frac{81}{4}a - \frac{81}{2}a & = & -40{,}5 & \\ \Rightarrow & -\frac{81}{4}a & = & -40{,}5 & \mid \cdot \left(-\frac{4}{81}\right) \\ \Rightarrow & a & = & 2 & \end{array}$$

und somit muss

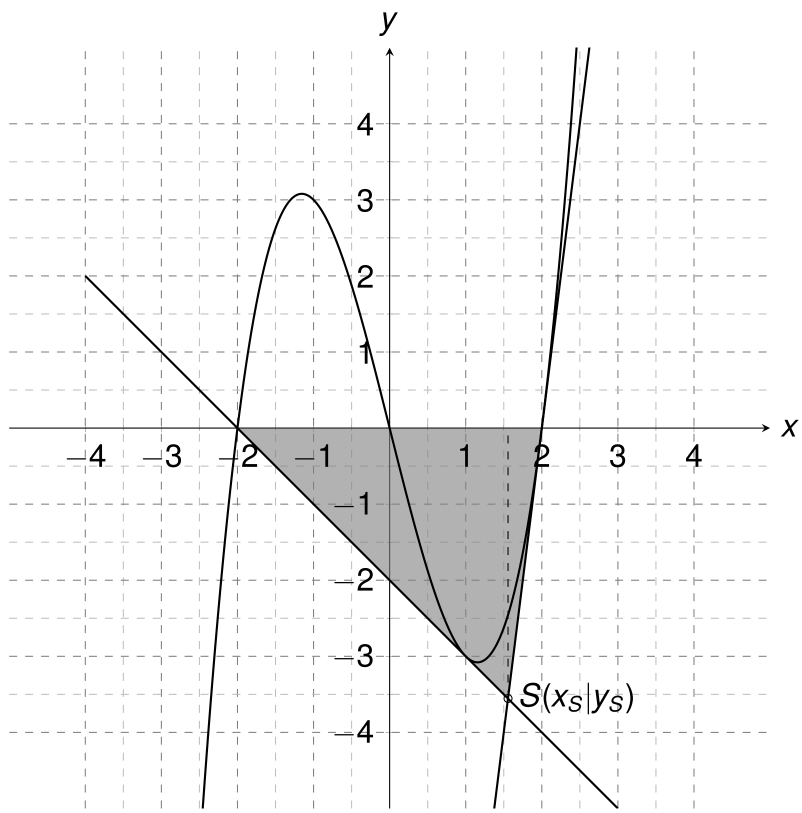
$$9a \underset{a=2}{=} 18 = b$$

sein. Daher hat die Funktion $f_{2;18}(x) = 2x^3 - 18x$ eine Nullstelle bei $x = 3$ und schließt im vierten Quadranten mit der x-Achse eine Fläche von 40,5 FE ein.

d) Der Flächeninhalt eines Dreiecks berechnet sich durch

$$A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a$$

Dabei ist a eine Seite des Dreiecks und h_a die zugehörige Höhe.



Als Seite a wählen wir am sinnvollsten die Seite, die genau auf der x-Achse liegt. Somit benötigen wir den Abstand zwischen Punkt $A(2|0)$ und der Nullstelle von $y = -x - 2$.

Die Nullstelle ist liegt bei:

$$\begin{aligned} -x - 2 &= 0 \qquad | -x \\ \Rightarrow \qquad x &= -2 \end{aligned}$$

Der Abstand der beiden Punkte auf der x-Achse ist die Differenz ihrer x-Koordinaten

$$a = 2 - (-2) = 4.$$

Für die Höhe benötigen wir den Schnittpunkt der beiden Geraden. Dafür stellen wir zuerst die Tangentengleichung auf.

Mit Hilfe der Potenzregel erhalten wir die Ableitung

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x^3 - 4x\right)' \\ &= 3x^2 - 4 \end{aligned}$$

Setzen wir dort $x = 2$ ein, erhalten wir die Steigung der Tangente in $A(2|0)$.

$$\begin{aligned} f'(2) &= 3 \cdot 2^2 - 4 \\ &= 8 \end{aligned}$$

Also ist die Steigung $m = 8$. Nun setzen wir noch den Punkt A in die allgemeine Geradengleichung ein und erhalten so den y-Achsenabschnitt n

$$\begin{aligned} y &= mx + n \\ \Rightarrow \quad 0 &= 8 \cdot 2 + n \\ \Rightarrow \quad 0 &= 16 + n \qquad | -16 \\ \Rightarrow \quad n &= -16 \end{aligned}$$

Nun können wir den Schnittpunkt der beiden Geraden bestimmen, dafür setzen wir sie gleich:

Schnittpunkt 2er Geraden

$$\begin{aligned} 8x - 16 &= -x - 2 \qquad | +x \\ \Rightarrow \quad 9x - 16 &= -2 \qquad | +16 \\ \Rightarrow \quad 9x &= 14 \qquad | \div 9 \\ \Rightarrow \quad x &= \tfrac{14}{9} \end{aligned}$$

Für die Höhe benötigen wir y-Koordinate des Schnittpunktes, also setzen wir $x = \frac{14}{9}$ in eine der Geraden ein:

$$y = -\frac{14}{9} - 2 = -\frac{14}{9} - \frac{18}{9} = -\frac{32}{9}$$

Es folgt der gesuchte Flächeninhalt:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \left| -\frac{32}{9} \right| = \frac{64}{9}$$

e) Ein solcher Punkt P hat die allgemeine Form $P(x_0|f(x_0))$. Der Mittelpunkt lässt sich berechnen, indem wir die Mittelpunkte der Koordinaten einzeln berechnen. Da der andere Punkt der Koordinatenursprung $O(0|0)$ ist, folgt:

$$x_M = \frac{x_0 - 0}{2 - 0} = \frac{x}{2} \qquad \text{und} \qquad y_M = \frac{f(x_0) - 0}{2 - 0} = \frac{f(x_0)}{2}$$

Daraus folgt, dass wenn wir x_M in $h(x)$ einsetzen, wir $\dfrac{f(x)}{2}$ erhalten, also:

$$h\left(\frac{x_0}{2}\right) = \frac{f(x_0)}{2}$$

Setzen wir $\frac{x_0}{2}$ in $h(x)$ ein, erhalten wir

$$\begin{aligned} h\left(\frac{x_0}{2}\right) &= 4 \cdot \left(\frac{x_0}{2}\right)^3 - 4\frac{x_0}{2} = 4 \cdot \frac{x_0^3}{8} - 2x_0 \\ &= \frac{1}{2}x_0^3 - 2x_0 = \frac{1}{2}(x_0^3 - 4x_0) \\ &= \frac{f(x_0)}{2} \end{aligned}$$

Somit ist die Aussage richtig.

zu Aufgabe 2:
Analyse der Lesebestätigungen.

a) Aus der Tabelle entnehmen wir für den Zeitraum 8:30 Uhr bis 10:00 Uhr folgende Berechnung:

$$\begin{aligned} \text{Differenz} &= 4364 - 1701 \\ &= 2663 \text{ Lesebestätigungen} \end{aligned}$$

Der Mittelwert pro Stunde berechnet sich durch:

$$\begin{aligned} \text{Mittelwert} &= \frac{2663}{1{,}5} \\ &\approx 1775 \text{ Lesebestätigungen pro Stunde} \end{aligned}$$

b) Da $0 \leq 2 < 3$, verwenden wir $k(2) = u(2)$:

$$\begin{aligned} k(2) &= u(2) \\ &= 100 \cdot 2^3 - 900 \cdot 2^2 + 2300 \cdot 2 \\ &= 800 - 3600 + 4600 \\ &= 1800 \end{aligned}$$

Dies bedeutet, dass zum Zeitpunkt 9:00 Uhr (2 Stunden nach 7:00 Uhr) die momentane Änderungsrate 1800 Lesebestätigungen pro Stunde beträgt.

c) Die Linearfaktorzerlegung der Funktion $v(x)$ ist:

$$\begin{aligned} v(x) &= 20x^2 - 520x + 2880 \\ &= 20(x - 18)(x - 8) \end{aligned}$$

Es liegt also eine Parabel vor, die nach oben geöffnet ist, mit den Nullstellen $x = 8$ und $x = 18$. Zwischen den Nullstellen, sind die Funktionswerte somit negativ. Nach 15:00 Uhr gilt $x > 8$ und somit wäre nach 15:00 Uhr die momentane Änderungsrate negativ, was im Sachzusammenhang keinen Sinn ergibt (es können nicht weniger Lesebestätigungen werden).

d) Für den Zeitraum 10:00 Uhr bis 15:00 Uhr ($3 \leq x \leq 8$) berechnen wir das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned} \int_3^8 k(x)\,dx &= \int_3^8 (20x^2 - 520x + 2880)\,dx \\ &= \left[\tfrac{20}{3}x^3 - 260x^2 + 2880x\right]_3^8 \\ &= \left(\tfrac{20}{3} \cdot 8^3 - 260 \cdot 8^2 + 2880 \cdot 8\right) - \left(\tfrac{20}{3} \cdot 3^3 - 260 \cdot 3^2 + 2880 \cdot 3\right) \\ &= 3333 \end{aligned}$$

Die tatsächliche Anzahl laut Tabelle beträgt:

$$\begin{aligned}\text{Differenz} &= 7572 - 4364\\ &= 3208\end{aligned}$$

Die prozentuale Abweichung berechnet sich durch:

$$\begin{aligned}\text{Abweichung in \%} &= \frac{3333 - 3208}{3208}\\ &= \frac{125}{3208}\\ &= 3{,}9\%\end{aligned}$$

Geometrie

zu Aufgabe 1:

a) Der erste Schritt ist zu zeigen, dass die Seitenflächen kongruente gleichschenklige Dreiecke sind. Da der Ursprung der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$ in der x_1x_2-Ebene ist und S auf der x_3-Achse liegt, handelt es sich um eine gerade Pyramide. Damit sind alle Abstände von S zu den Eckpunkten gleich lang, also

$$|\overline{AS}| = |\overline{BS}| = |\overline{CS}| = |\overline{DS}|.$$

Um den Flächeninhalt der Pyramide zu bestimmen, können wir wie folgt vorgehen:

1. Berechnung einer Seitenfläche über Grundseite und Höhe
2. Berechnung der quadratischen Grundfläche
3. Bestimmung der Gesamtoberfläche

Für die Seitenfläche BCS nutzen wir:

- Grundseite $g = |\overline{BC}| = 6$ (aus den Koordinaten ablesbar)
- Höhe $h = |\overline{M_{BC}S}|$ mit $M_{BC}(3|0|0)$ als Mittelpunkt von BC

Abstand Punkt <> Punkt

Mit

$$|\overline{M_{BC}S}| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

folgt für den Flächeninhalt eines Seitendreiecks:

$$F = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5 = 15 \text{ FE}$$

Die quadratische Grundfläche hat die Seitenlänge 6, also einen Flächeninhalt von:

$$\text{Grundfläche} = 6 \cdot 6 = 36 \text{ FE}$$

Die Gesamtoberfläche setzt sich aus den vier kongruenten Seitenflächen und der Grundfläche zusammen:

$$O = 4 \cdot 15 + 36 = 96 \text{ FE}$$

b) Um die Symmetrieebenen der Pyramide zu bestimmen, gehen wir systematisch vor:

1. Eine Symmetrieebene muss durch die Spitze S gehen
2. Eine Symmetrieebene muss die Grundfläche in zwei gleiche Hälften teilen

3. Die x_3-Achse liegt in jeder Symmetrieebene, da sie durch S geht und senkrecht auf der Grundfläche steht

Prüfen wir die gegebenen Gleichungen:

1. $x_1 + x_2 = 0$ ist eine Symmetrieebene, denn: Sie geht durch $B(3|-3|0)$, $D(-3|3|0)$ und $S(0|0|4)$. Sie teilt das Quadrat $ABCD$ diagonal und halbiert somit die Pyramide und die x_3-Achse liegt in ihr.
2. $x_1 - x_3 = 0$ ist keine Symmetrieebene, denn:
   Einsetzen von $S(0|0|4)$ ergibt $0 - 4 \neq 0$. Also liegt S nicht in dieser Ebene.
3. $x_1 + x_2 + x_3 = 4$ ist keine Symmetrieebene, denn:
   Sie enthält nicht die x_3-Achse (Einsetzen von $(0|0|t)$ ergibt $t = 4$).

c) Um die Koordinatengleichung der Ebene E durch die Punkte C, D und S aufzustellen, gehen wir systematisch vor:

Koordinatenform

Wir wählen $\overrightarrow{DC}$ (skaliert) und $\overrightarrow{SC}$ als Spannvektoren der Ebene:

$$\frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{DC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Berechnung des Normalenvektors über das Kreuzprodukt:

$$\vec{n} = \frac{1}{6} \cdot \overrightarrow{DC} \times \overrightarrow{SC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot (-4) - 0 \cdot 3 \\ 0 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) \\ 1 \cdot 3 - 0 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Aufstellung der Koordinatengleichung mit dem Normalenvektor:

$$E : 4x_2 + 3x_3 = d$$

Einsetzen eines Punktes der Ebene, z.B. $S(0|0|4)$, liefert:

$$4 \cdot 0 + 3 \cdot 4 = 12 = d$$

Damit lautet die Koordinatengleichung der Ebene E:

$$E : 4x_2 + 3x_3 = 12$$

d) Um den Punkt P auf der x_3-Achse zu finden, analysieren wir die gegebenen Gleichungen schrittweise. Aus Gleichung (I) wissen wir:

- Q liegt auf der Senkrechten zu E durch $P(0|0|p)$, da der angegebene Ortsvektor der
- Punkt P ist und der Richtungsvektor der zuvor berechnete Normalenvektor der Ebene.

Die Parameterdarstellung von Q ist $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 4t \\ p+3t \end{pmatrix}$.

Gleichung (II) sagt uns: Q liegt auf der Ebene $E : 4x_2 + 3x_3 = 12$, denn setzen wir dort die Parameterdarstellung ein, erhalten wir:

$$4(4t) + 3(p + 3t) = 12$$

Gleichung (III) beschreibt: Der Abstand zwischen P und Q ist gleich dem Abstand von P zur Ebene E.

Die Werte für t und p ergeben sich durch Lösen des Gleichungssystems aus den Gleichungen (II) und (III).

e) Um zu zeigen, dass S in allen Ebenen E_k liegt, prüfen wir, ob seine Koordinaten die allgemeine Ebenengleichung für beliebiges k erfüllen:

Die allgemeine Ebenengleichung lautet:

$$E_k : 2k \cdot x_1 + \sqrt{1-k^2} \cdot x_2 + 3x_3 = 12$$

Einsetzen der Koordinaten von $S(0|0|4)$:

$$\begin{aligned} S \text{ in } E_k \quad \Rightarrow \quad 2k \cdot 0 + \sqrt{1-k^2} \cdot 0 + 3 \cdot 4 &= 12 \\ \Leftrightarrow \quad 0 + 0 + 12 &= 12 \\ \Leftrightarrow \quad 12 &= 12 \end{aligned}$$

Punktprobe

Die Gleichung ist für jedes k erfüllt. Der Wert von k hat keinen Einfluss auf das Ergebnis und damit ist S ein gemeinsamer Punkt aller Ebenen E_k.

f) Für den Winkel zwischen der Geraden OS und den Ebenen E_k benötigen wir den Richtungsvektor von OS und den Normalenvektor von E_k:

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \vec{n}_k = \begin{pmatrix} 4k \\ 4\sqrt{1-k^2} \\ 3 \end{pmatrix}$$

Der Winkel α zwischen Gerade und Ebene berechnet sich über:

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{r} \bullet \vec{n}_k|}{|\vec{r}| \cdot |\vec{n}_k|}$$

Schnittwinkel

Im Zähler liegt ein Skalarprodukt aus, was wir wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}|\vec{r} \bullet \vec{n}_k| &= |0 \cdot 4k + 0 \cdot 4\sqrt{1-k^2} + 4 \cdot 3| \\ &= |12| = 12\end{aligned}$$

Im Nenner berechnen wir die Beträge:

$$\begin{aligned}|\vec{r}| &= \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4 \\ |\vec{n}_k| &= \sqrt{16k^2 + 16(1-k^2) + 9} = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5\end{aligned}$$

Anschließend setzen wir in die Formel ein und erhalten:

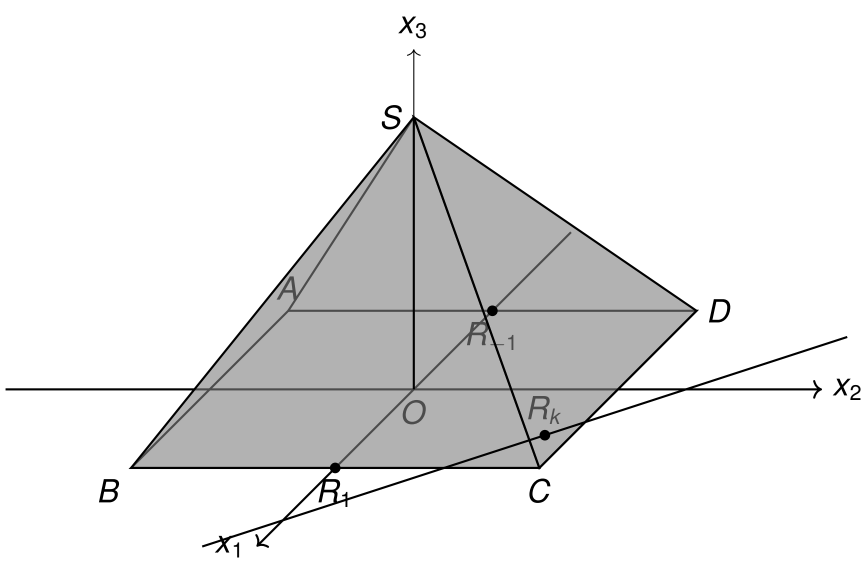
$$\sin(\alpha) = \frac{12}{4 \cdot 5} = \frac{3}{5}$$

g) Die Lage der Ebene E_{-1} durch die Seitenfläche ADS analysieren wir schrittweise. Wir betrachten zunächst die Eigenschaften der Schnittgeraden g_{-1} mit der x_1x_2-Ebene:

- Enthält die Punkte A und D der Grundfläche.
- Verläuft parallel zur x_2-Achse.
- Schneidet die x_1-Achse im Punkt $R_{-1}(-3|0|0)$.

Für die gegenüberliegende Seite gilt analog:

Die Ebene E_1 enthält die Seitenfläche BCS und ihr Schnittpunkt mit der x_1-Achse ist $R_1(3|0|0)$.



h) Der Winkel zwischen E_k und der x_3-Achse ist konstant (aus Teilaufgabe f)). Die Dreiecke OR_kS sind für alle k kongruent und $|\overline{OR_k}|$ ist konstant und gleich 3 (aus $R_1(3|0|0)$).

- Geometrische Interpretation für $k \in [-1, 1]$:
  R_k durchläuft einen Halbkreis in der x_1x_2-Ebene und das Dreieck OR_kS überstreicht dabei einen halbierten geraden Kreiskegel
- Volumenberechnung:
  Das Volumen ist die Hälfte eines geraden Kreiskegels:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Mit Grundfläche $G = \pi r^2 = \pi \cdot 3^2$ und Höhe $h = 4$:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 9 \cdot 4 = 6\pi \text{ VE}$$

Stochastik

zu Aufgabe 1:

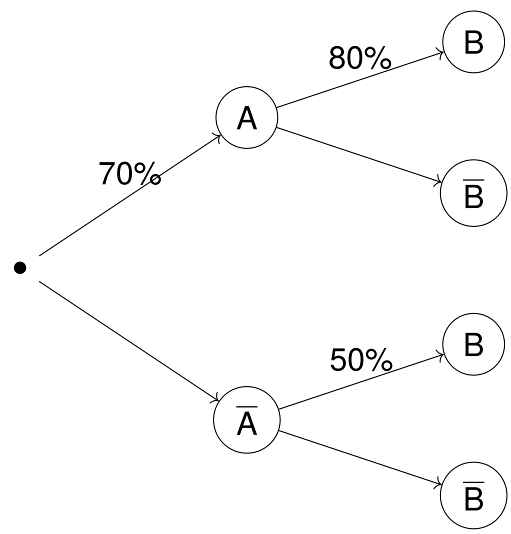
a) Als Grundgesamtheit werden zunächst alle Abonnenten betrachtet. Die relevanten Ereignisse sind:

A: „Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt.“

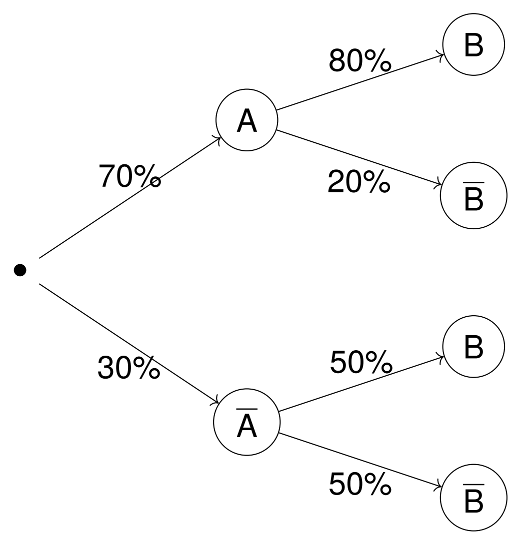
B: „Ein Abonnent hat das Komplettpaket gewählt.“

Wir beziehen uns in der ersten Stufe auf das Ereignis *A*, da dass Ereignis *B* auf das Ereignis *A* bezogen wird und somit sinnvoller in der Stufe zwei ist.

Baum-
diagramm



Ergänzen wir die fehlenden Gegenwahrscheinlichkeiten, erhalten wir



b) Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt zunächst:

Bed. Wahrscheinlichkeit

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) \\ &= 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \\ &= 0{,}56 + 0{,}15 \\ &= 0{,}71 \end{aligned}$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ berechnet sich durch:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}71} = \frac{0{,}56}{0{,}71} \approx 0{,}79$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit 79%.

c) Dies ist eine leichte Abwandlung einer typischen 3x-mindestens Aufgabe (wenn man den letzten Satz umformuliert zu mindestens 6 Personen sollen älter als 40 Jahre sein).

Sei X die Zufallsgröße mit:

$$X: \text{Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind}$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Gegenereignis von A beträgt:

Mind.-Aufgabe

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0{,}7 \\ &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Da die Grundgesamtheit sehr groß ist, können wir X als binomialverteilt annehmen:

$$X \sim B(n; 0{,}3)$$

Gesucht ist das kleinste n mit:

$$P_{0,3}^{n}(X > 5) \geq 0{,}99$$

Dies lässt sich umformen zu:

$$\begin{aligned} P_{0,3}^{n}(X > 5) &= 1 - P_{0,3}^{n}(X \leq 5) \\ 1 - P_{0,3}^{n}(X \leq 5) &\geq 0{,}99 \\ P_{0,3}^{n}(X \leq 5) &\leq 0{,}01 \end{aligned}$$

Systematisches Probieren ergibt:

$$\begin{aligned} P_{0,3}^{39}(X \leq 5) &\approx 0{,}011 > 0{,}01 \\ P_{0,3}^{40}(X \leq 5) &\approx 0{,}009 \leq 0{,}01 \end{aligned}$$

Somit ist $n = 40$ die gesuchte Mindestanzahl.

d) Analyse der Nullhypothese:

Wir betrachten die beiden möglichen Fehlerarten:

$$H_0: \quad p \leq 0{,}6 \text{ (Nullhypothese)}$$
$$H_1: \quad p > 0{,}6 \text{ (Alternativhypothese)}$$

Fehler 1. Art:

Fälschliches Verwerfen von H_0, wenn $p \leq 0{,}6$ gilt

Wahrscheinlichkeit dafür maximal 5%

Fehler 2. Art:

Fälschliches Beibehalten von H_0, wenn $p > 0{,}6$ gilt

Wahrscheinlichkeit hierfür nicht begrenzt

Das Management wählt diese H_0, da:

1. Vermeidung unnötiger Kosten durch Algorithmus-Einsatz
2. Risiko eines Fehlers 1. Art wird auf 5% begrenzt
3. Höheres Risiko eines Fehlers 2. Art wird akzeptiert

e) Ergänzung des fehlenden Lösungsschritts:

Da $H_0 : p \leq 0{,}6$, führen wir einen rechtsseitigen Test durch. Für den Ablehnungsbereich $A = \{g; \ldots; n\}$ gilt:

$$0 \leq g \leq n \quad \text{mit} \quad n = 200$$

Die Zufallsgröße Y ist binomialverteilt:

$$Y \sim B(200; 0{,}6)$$
$$Y : \text{Anzahl der zufriedenen Abonnenten}$$

Gegeben ist:

$$P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0{,}047 \leq 0{,}05$$

Dies zeigt $g \leq 132$. Für den Nachweis, dass $g = 132$ die kleinste mögliche Zahl ist, muss gelten:

$$P_{0,6}^{200}(Y \geq 131) > 0{,}05$$

Berechnung ergibt:

$$P_{0,6}^{200}(Y \geq 131) \approx 0{,}064 > 0{,}05$$

Dies ist der fehlende Berechnungsschritt, um sicher sagen zu können, dass $g = 132$ die gesuchte Zahl.

f) Nachweis des Fehlers zweiter Art:

Aus Teilaufgabe e) wissen wir:

$$P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0{,}047 \text{ (Fehler 1. Art)}$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art gilt:

$$\begin{aligned} 1 - P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) &= P_{0,6}^{200}(Y \leq 131) \\ &\approx 0{,}953 \end{aligned}$$

Wählen wir für die Alternative H_1 beispielsweise $p = 0{,}61 > 0{,}6$:

$$\begin{aligned} P_{0,61}^{200}(Y \leq 131) &\approx 0{,}917 \\ &> 0{,}9 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art über 90% liegt.

g) Abschätzung des Anteils der Kennwörter:

Zunächst betrachten wir die Gesamtanzahl möglicher Kennwörter:

Kombinatorik

$$\begin{aligned} \text{Verfügbare Zeichen} &: 80 \\ \text{Kennwortlänge} &: 8 \\ \text{Gesamtanzahl} &= 80^8 \end{aligned}$$

Für Kennwörter nur aus Kleinbuchstaben gilt:

$$\begin{aligned} \text{Verfügbare Zeichen} &: 26 \\ \text{Anzahl} &= 26^8 \end{aligned}$$

Der gesuchte Anteil beträgt somit:

$$\begin{aligned} \text{Anteil} &= \frac{26^8}{80^8} \\ &\approx 0{,}00012 \\ &< \frac{1}{1000} = 0{,}001 \end{aligned}$$

h) Bestimmung der Anzahl der Kennwörter mit vorgegebenen Bedingungen:

Analyse der Ausgangssituation:

$$\begin{aligned} \text{Länge „Niclas“} &: 6 \text{ verschiedene Zeichen} \\ \text{Verbleibende Zeichen} &= 80 - 6 = 74 \\ \text{Zu füllende Positionen} &: 2 \end{aligned}$$

Berechnung der Möglichkeiten:

$$\begin{aligned} \text{Auswahl der zwei Zeichen} &= 74 \cdot 73 = 5402 \\ \text{Auswahl der Positionen} &= \binom{8}{6} = \binom{8}{2} = 28 \end{aligned}$$

Gesamtanzahl der möglichen Kennwörter:

$$\begin{aligned} \text{Anzahl} &= \binom{8}{2} \cdot 74 \cdot 73 \\ &= 28 \cdot 5402 \\ &= 151256 \end{aligned}$$

Somit gibt es genau 151256 verschiedene Kennwörter, die den gegebenen Bedingungen entsprechen.