

Gymnasium NRW - GK

Mathe Abitur Klausuren

Originale Prüfungsaufgaben
inkl. Lösungen von

Daniel Jung



Jahr:
2024



 **StudyHelp**

© StudyHelp GmbH



Mathe Abi Klausurenheft – NRW (Grundkurs)

Prüfungsjahr 2024

Copyright © 2024 StudyHelp
StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Christian Strack
Konzept & Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

Das Werk, einschließlich seiner Teile, ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung ist ohne Zustimmung des Verlages und des Autors unzulässig. Dies gilt insbesondere für die elektronische oder sonstige Vervielfältigung, Übersetzung, Verbreitung und öffentliche Zugänglichmachung. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und sonstigen Bildungseinrichtungen.

Auf verschiedenen Seiten dieses Buches befinden sich Verweise (Links) auf Internet-Adressen. Haftungshinweis: Trotz sorgfältiger inhaltlicher Kontrolle wird die Haftung für die Inhalte der externen Seiten ausgeschlossen. Für den Inhalt dieser externen Seiten sind ausschließlich deren Betreiber verantwortlich. Sollten Sie bei dem angegebenen Inhalt des Anbieters dieser Seite auf kostenpflichtige, illegale oder anstößige Inhalte treffen, so bedauern wir dies ausdrücklich und bitten Sie, uns umgehend per E-Mail davon in Kenntnis zu setzen, damit beim Nachdruck der Verweis gelöscht wird.

E-Book

Inhalt

1	Abi Klausur 2024	5
1.1	Aufgaben	5
1.1.1	Prüfungsteil A	5
1.1.2	Prüfungsteil B	11
1.2	Lösungen	19
1.2.1	Prüfungsteil A	19
1.2.2	Wahlpflichtaufgaben	23
1.2.3	Prüfungsteil B	35

1 Abi Klausur 2024

1.1 Aufgaben

1.1.1 Prüfungsteil A

Für das Prüfungsjahr 2024 war der Prüfungsteil A wie folgt aufgebaut:

- **Pflichtaufgaben:**
Es wurden 3 Aufgaben gestellt, die alle bearbeitet werden mussten.
- **Wahlpflichtaufgaben:**
Es gab 6 Aufgaben zur Auswahl, von denen 2 bearbeitet werden mussten.

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: max. 60 Minuten

Pflichtaufgaben

Die folgenden **drei** Aufgaben müssen alle bearbeitet werden.

Aufgabe 1:

Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit $f(x) = x^3 - 4x$.

- a) Begründen Sie, dass der Graph von f symmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs ist.
- b) Der Graph von f und die x -Achse schließen eine Fläche ein, die aus zwei Flächenstücken besteht.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche.

Aufgabe 2:

Gegeben sind die Punkte $A(2|4|5)$, $B(1|2|3)$ und $C(7|5|-3)$.

- a) Zeigen Sie, dass die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ orthogonal zueinander sind.
- b) Geben Sie die Koordinaten des Punktes D an, der die Punkte A , B und C zu einem Rechteck $ABCD$ ergänzt.
- c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Rechtecks $ABCD$.

Aufgabe 3:

Auf einer Spendengala wird das folgende Spiel angeboten: Für einen Einsatz von 3 € dreht der Spieler zweimal ein Glücksrad. Dieses besteht aus mehreren gleich großen Sektoren. 10% der Sektoren sind grün eingefärbt. Für jedes Erzielen eines grünen Sektors werden dem Spieler 10 € ausbezahlt.

- a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, bei diesem Spiel genau einmal einen grünen Sektor zu erzielen, 18% beträgt.
- b) Begründen Sie, dass der Veranstalter der Spendengala erwarten kann, mit diesem Spiel auf lange Sicht mehr Geld einzunehmen als auszuzahlen.

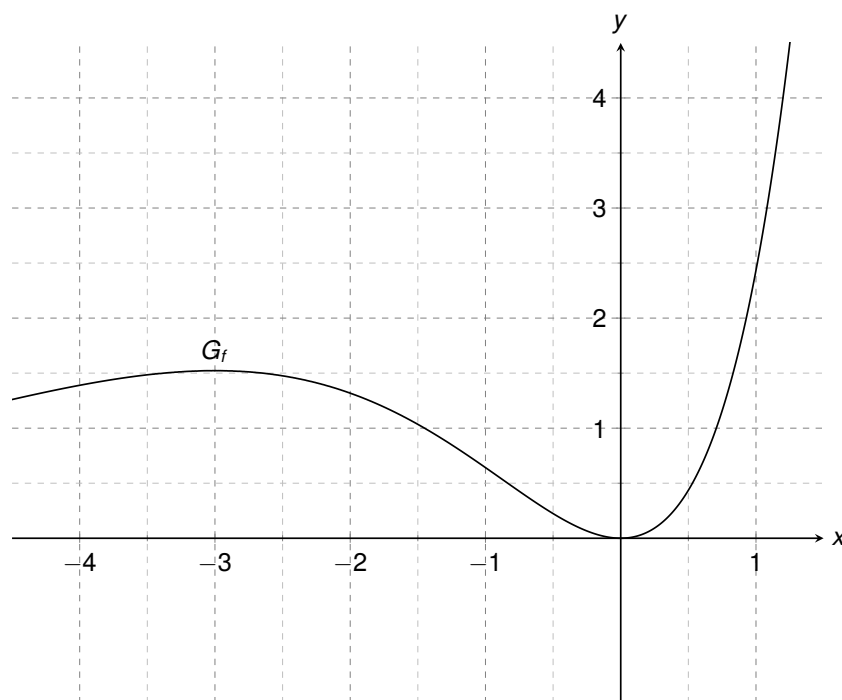
Wahlpflichtaufgaben

Von den nächsten sechs Aufgaben müssen **zwei beliebige Aufgaben** bearbeitet werden.

Aufgabe 4:

Abbildung 1 zeigt den Graphen G_f einer in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f .

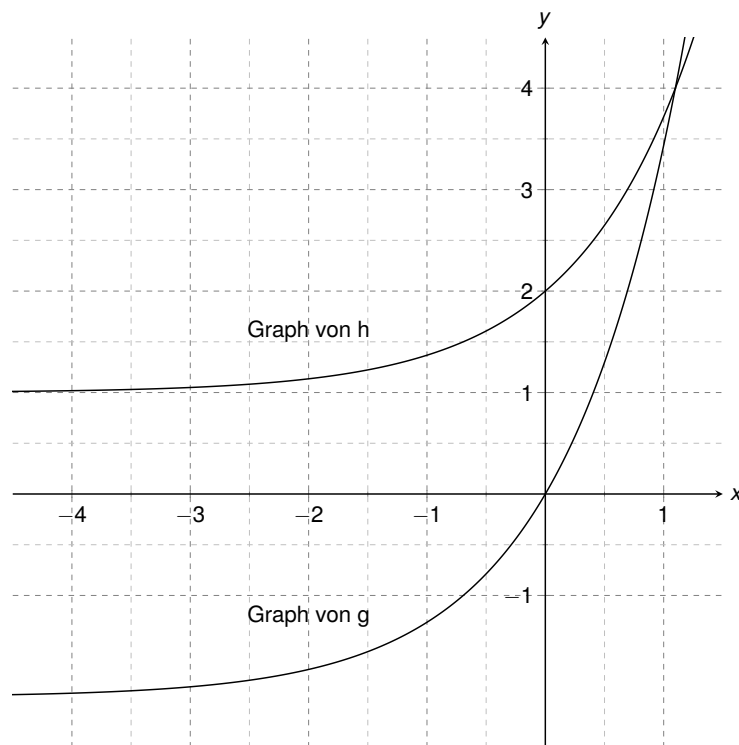
- a) Bestimmen Sie grafisch den Wert des Integrals $\int_{-3}^{-1,5} f(x) dx$.
- b) Beschreiben Sie, wie der Graph der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion u mit $u(x) = -f(x) + 2$ aus G_f erzeugt werden kann.
Geben Sie die Koordinaten des Hochpunktes des Graphen von u an.

**Aufgabe 5:**

Gegeben sind die in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen g mit $g(x) = 2 \cdot e^x - 2$ und h mit $h(x) = e^x + 1$.

Abbildung 2 zeigt ihre Graphen.

- a) Die erste Ableitungsfunktion von g wird mit g' bezeichnet.
Berechnen Sie $g'(0)$ und veranschaulichen Sie in Abbildung 2, wie man diesen Wert grafisch ermitteln kann.
- b) Beurteilen Sie die folgende Aussage:
Es gibt eine Verschiebung in y -Richtung, durch die der Graph von h aus dem Graphen von g erzeugt werden kann.

**Aufgabe 6:**

Gegeben sind der Punkt $P(0|0|3)$ sowie die Geraden

$$g: \vec{x} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

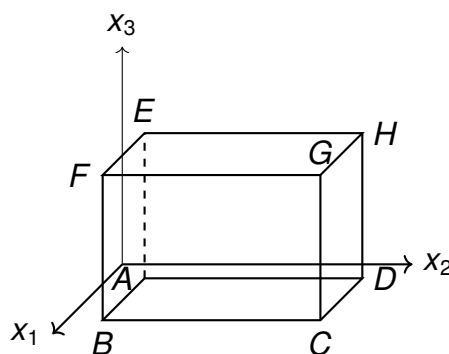
und

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R}.$$

- Zeigen Sie, dass sich die Geraden g und h schneiden, und geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S an.
- Der Punkt $R(2|1|1)$ liegt auf der Gerade g .
Bestimmen Sie die Koordinaten eines Punktes $P' \neq P$, der auf der Gerade g liegt und den gleichen Abstand vom Punkt R hat wie der Punkt P .

Aufgabe 7:

Die Punkte $A(1|1|0)$, $B(4|1|0)$, $E(1|1|4)$ und $H(1|7|4)$ sind Eckpunkte des in Abbildung 3 dargestellten Quaders $ABCDEFGH$.



- a) Geben Sie die Koordinaten des Punktes G an.

Der Quader wird parallel zu einer Gerade so verschoben, dass sich der Schnittpunkt seiner Raumdiagonalen im Koordinatenursprung befindet. Dabei entsteht der Quader $A'B'C'D'E'F'G'H'$.

- b) Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes H' .
- c) Geben Sie einen Eckpunkt des Quaders $A'B'C'D'E'F'G'H'$ an, der nur positive Koordinaten hat.

Aufgabe 8:

In einem Spielwarengeschäft erhält jedes Kind im Rahmen einer Werbeaktion einen kleinen, blickdicht verpackten Ball. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass dieser Ball eine Glitzerfärbung hat, beträgt 40%.

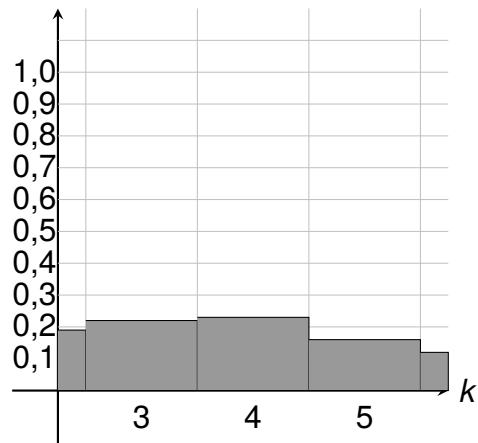
- a) Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass in einer Gruppe von drei Kindern jedes Kind einen Ball mit Glitzerfärbung erhält, kleiner als 10% ist.
- b) Beschreiben Sie in diesem Sachzusammenhang ein Zufallsexperiment, bei dem die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses mit dem Term $\left(\frac{3}{5}\right)^4 + 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \frac{2}{5}$ berechnet werden kann. Geben Sie dieses Ereignis an.

Aufgabe 9:

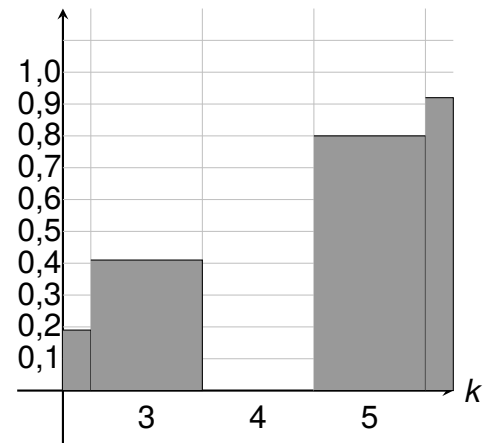
Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt mit den Parametern n und $p = \frac{1}{4}$.

- a) Für die Standardabweichung σ von X gilt: $\sigma = \sqrt{3}$. Berechnen Sie n .
- b) Die folgende Abbildung 4 zeigt die Werte $P_{n; \frac{1}{4}}(X = k)$ der Zufallsgröße X im Bereich von $k = 3$ bis $k = 5$; Abbildung 5 zeigt kumulierte Werte $P_{n; \frac{1}{4}}(X \leq k)$ der Zufallsgröße X im Bereich von $k = 3$ bis $k = 5$.
In Abbildung 5 fehlt der Wert $P_{n; \frac{1}{4}}(X \leq 4)$.
Ermitteln Sie näherungsweise $P_{n; \frac{1}{4}}(X \leq 4)$ und vervollständigen Sie Abbildung 5.

$$P_{n;\frac{1}{4}}(X = k)$$



$$P_{n;\frac{1}{4}}(X \leq k)$$



1.1.2 Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **Hilfsmittel** (GTR, Mathematische Formelsammlung, Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung) verwendet werden.

- Arbeitszeit: mind. 255 Minuten
(je schneller du bei Prüfungsteil A fertig bist, desto mehr Zeit bleibt für diesen Prüfungsteil)

Analysis

Aufgabe 1:

- a) Ein mit Wasser befülltes Glas wird aus einem Kühlschrank genommen. Die anschließende Entwicklung der Wassertemperatur infolge der höheren Raumtemperatur lässt sich mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion $f: t \mapsto 25 - 20e^{-0,014 \cdot t}$ modellhaft beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Minuten, die seit der Entnahme aus dem Kühlschrank vergangen ist, und $f(t)$ die Wassertemperatur in $^{\circ}\text{C}$. Die Raumtemperatur beträgt konstant 25°C .

- (1) (i) Geben Sie die Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank an.
(ii) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur 12°C beträgt.

- (2) Berechnen Sie die Werte der folgenden Terme und interpretieren Sie diese im Sachzusammenhang:

(i) $f'(30)$

(ii) $\frac{f(30) - f(0)}{30 - 0}$

- (3) Zeigen Sie, dass in diesem Modell gilt:
Es gibt eine Konstante c , sodass zu jedem Zeitpunkt die Differenz zwischen der Raumtemperatur und der Wassertemperatur das c -fache der momentanen Änderungsrate der Wassertemperatur ist.
- (4) Die folgende Rechnung stellt die Lösung einer Aufgabe im vorliegenden Sachzusammenhang dar:

$$\text{Aus } f(t) = \frac{f(0) + 25}{2} \text{ ergibt sich } t \approx 49,5.$$

Formulieren Sie eine passende Aufgabenstellung.

- b) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

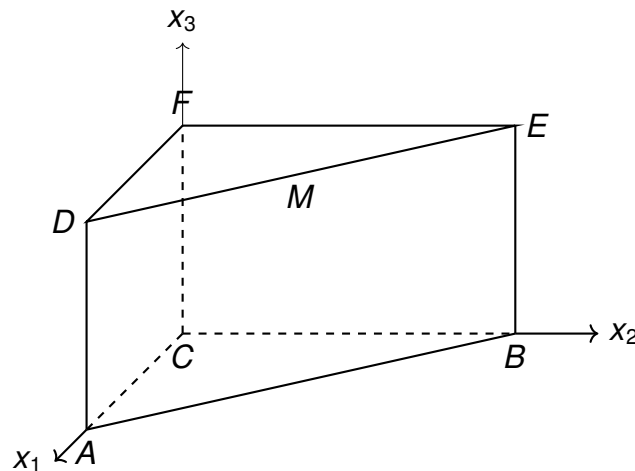
- (1) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass der Funktionswert $h(x)$ nur für $-1 < x < 1$ positiv ist.
- (2) Die Gerade u ist die Tangente an G_h im Punkt $P(0|1)$. Es gibt einen weiteren Punkt Q auf G_h , in dem die Tangente v an G_h zu u parallel ist. Bestimmen Sie die x -Koordinate von Q gerundet auf zwei Nachkommastellen.
- (3) Berechnen Sie die Wendestellen von h , ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden. In einem der Wendepunkte von G_h ist die Steigung von G_h maximal. Berechnen Sie den Wert der maximalen Steigung.

- (4) (i) Der globale Hochpunkt H von G_h liegt im Intervall $[0; 1]$. Geben Sie seine Koordinaten an.
- (ii) G_h schließt mit der x -Achse eine Fläche A ein. Die Gerade k verläuft parallel zur y -Achse durch H und teilt die Fläche A in zwei Teilflächen. Berechnen Sie den Anteil, den die größere der beiden Teilflächen an der Fläche A hat.
- (5) Für $0 < w < 1$ wird das Dreieck mit den Eckpunkten $(0|0)$, $(w|0)$ und $(w|h(w))$ betrachtet. Für einen Wert von w ist der Flächeninhalt des Dreiecks maximal. Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt, ohne dabei an Funktionsgraphen abgelesene Werte oder Zusammenhänge zu verwenden.

Geometrie

Aufgabe 1:

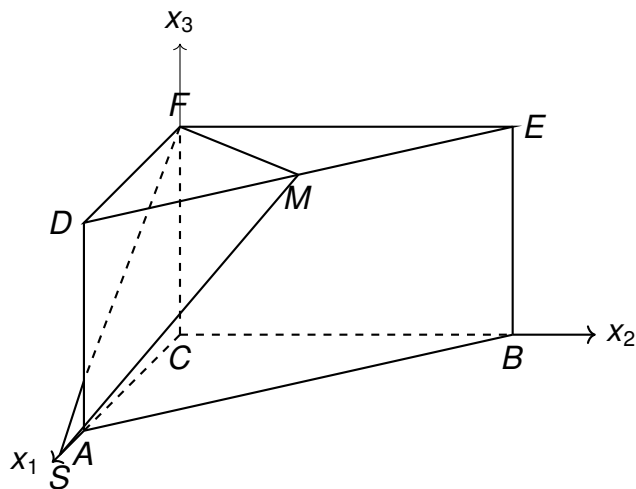
Gegeben sind das gerade Prisma ABCDEF mit den Eckpunkten $C(0 \mid 0 \mid 0)$, $D(6 \mid 0 \mid 5)$, $E(0 \mid 8 \mid 5)$ und $F(0 \mid 0 \mid 5)$ sowie der Punkt $M(3 \mid 4 \mid 5)$ (vgl. Abbildung 1).



- a)
 - 1) Geben Sie die Koordinaten des Punktes A an.
 - 2) Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels des Dreiecks DEF bei D.
 - 3) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Prismas.
 - 4) Begründen Sie, dass die Punkte D, E und F auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M liegen.
- b)
 - 1) Die Ebene W enthält die Punkte M, F und $S(7,5 \mid 0 \mid 0)$ (vgl. Abbildung 2).

Begründen Sie, dass $\tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, m \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{R},$

eine Gleichung von W in Parameterform ist.



- 2) Im Folgenden sind zwei Schritte der Lösung einer Aufgabe angegeben, die im Zusammenhang mit den betrachteten geometrischen Objekten steht:

i) $P(6 \mid 0 \mid r)$ mit $0 \leq r \leq 5$.

$$\text{ii) } \left| \begin{array}{l} 6 = 3 \cdot m + 7,5 \cdot n \\ 0 = 4 \cdot m \\ r = 5 - 5 \cdot n \end{array} \right|.$$

Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an.

3) Gegeben ist die Gerade g durch die Gleichung $g : \tilde{x} = \begin{pmatrix} -1,5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + k \cdot$

$$\begin{pmatrix} 7, 5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}.$$

Die Gerade h verläuft durch die Punkte S und M und lässt sich beschrei-

ben durch $h: \tilde{x} = \overrightarrow{OS} + q \cdot \overrightarrow{SM} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, q \in \mathbb{R}.$

Untersuchen Sie rechnerisch, ob die Gerade g und die Strecke $\overline{SM}$ einen gemeinsamen Punkt besitzen.

- 4) Anstelle des Punktes S werden nun Punkte $S_t(t|0|0)$ mit $t \geq 0$ auf der x-Achse betrachtet.

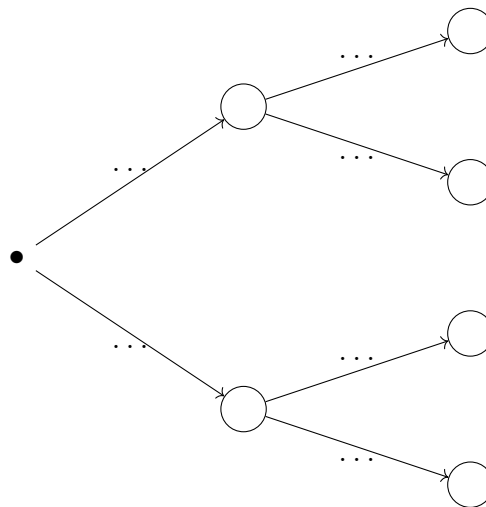
Bestimmen Sie denjenigen Wert von t , für den das Dreieck MFS_t im Punkt M rechtwinklig ist.

Stochastik

Aufgabe 1:

- a) Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter sind als 40 Jahre, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

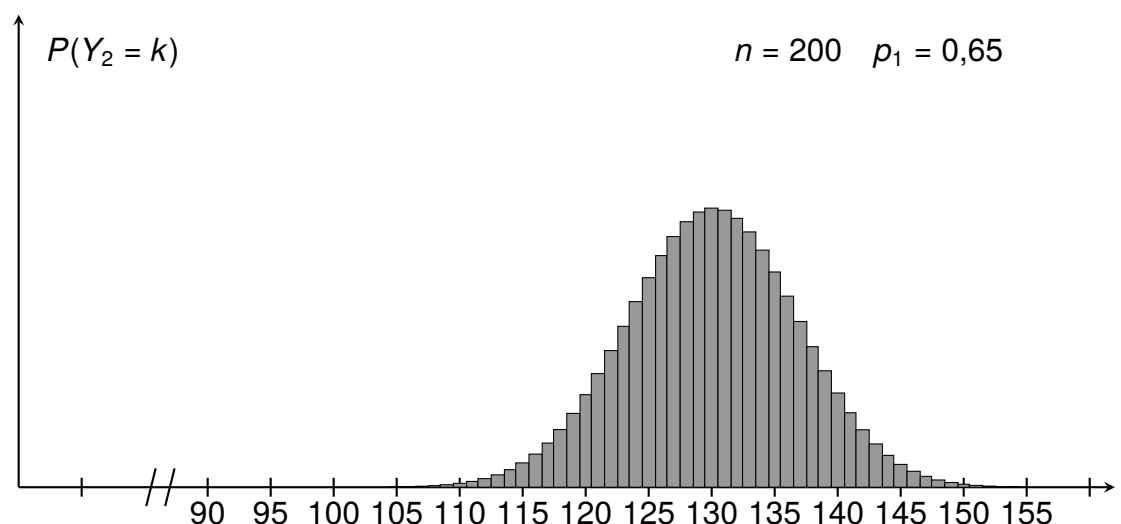
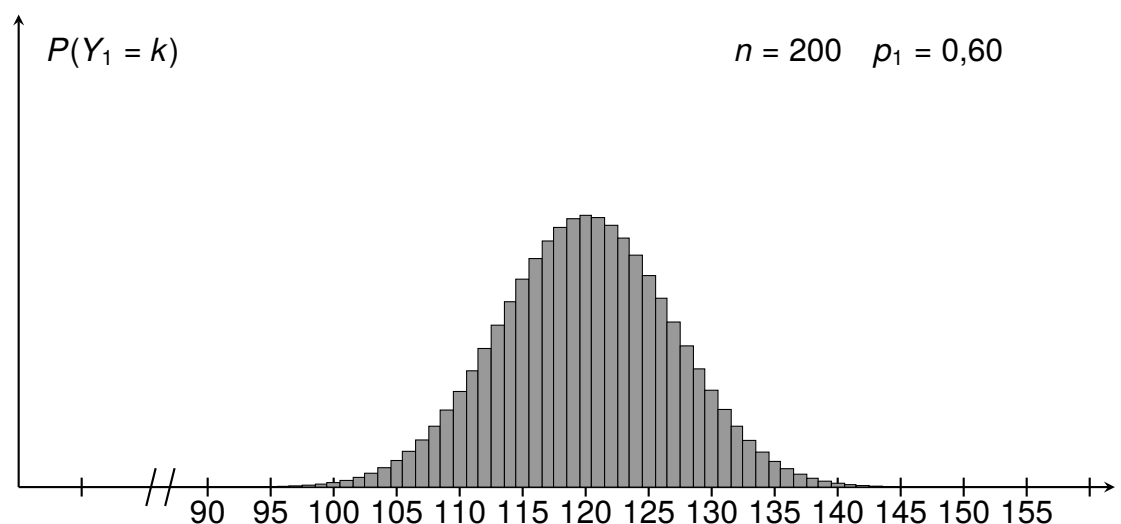
1) Stellen Sie den Sachverhalt im folgenden Baumdiagramm dar.



- 2) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.
- 3) Im Folgenden wird modellhaft davon ausgegangen, dass die Anzahl der höchstens 40-jährigen Abonnenten des Streamingdienstes binomialverteilt mit $p = 0,7$ ist.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 100 zufällig ausgewählten Abonnenten genau 70 höchstens 40 Jahre alt sind.
- 4) Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mehr als 20 Personen älter sind als 40 Jahre.
- b) Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb.
Im Anschluss soll mit einer Umfrage unter 200 zufällig ausgewählten Abonnenten untersucht werden, ob der Anteil der zufriedenen Abonnenten durch diese Maßnahme vergrößert wurde.

Von einer Vergrößerung des Anteils zufriedener Abonnenten wird ausgegangen, wenn von den 200 Abonnenten mindestens 132 zufrieden sind. Die Zufallsgröße Y : „Anzahl der nach dem Probetrieb zufriedenen Abonnenten unter den Befragten“ wird durch eine Binomialverteilung mit den Parametern $n = 200$ und p modelliert.

- 1) Ermitteln Sie, mit welcher Wahrscheinlichkeit das Management von einer Vergrößerung des Anteils zufriedener Abonnenten ausgeht, falls der Anteil der zufriedenen Abonnenten unverändert geblieben ist.
- 2)
 - i) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Management davon ausgeht, dass die Maßnahme nicht erfolgreich war, falls der Anteil zufriedener Abonnenten nach dem Probetrieb auf 65 % gestiegen ist.
 - ii) Die folgende Abbildung zeigt zwei Histogramme von binomialverteilten Zufallsgrößen Y_1 bzw. Y_2 mit $n = 200$ und $p_1 = 0,60$ bzw. $p_2 = 0,65$.



Veranschaulichen Sie die Wahrscheinlichkeiten aus b) (1) und b) (2) (i) in der Abbildung.

- iii) Ein Mitarbeiter des Managements ist der Meinung, dass die Wahrscheinlichkeit für die in 2 (i) beschriebene Fehlentscheidung zu hoch ist. Er schlägt vor, die Maßnahme bereits bei mindestens 125 mit dem Angebot zufriedenen Abonnenten als erfolgreich einzustufen.

Beurteilen Sie diesen Vorschlag.

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

zu Aufgabe 1:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 4x$ mit ihrem Graphen im Koordinatensystem.

a) Untersuchung der Symmetrieeigenschaft:

Der Funktionsterm von f enthält ausschließlich Potenzen von x mit ungeradzahligem Exponenten, nämlich x^3 und x^1 . Eine Funktion mit dieser Eigenschaft ist punktsymmetrisch zum Ursprung. Dies lässt sich auch formal überprüfen:

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^3 - 4(-x) \\ &= -x^3 + 4x \\ &= -(x^3 - 4x) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

Da $f(-x) = -f(x)$ für alle x gilt, ist der Graph der Funktion f punktsymmetrisch bezüglich des Koordinatenursprungs.

b) Berechnung des Flächeninhalts:

Zunächst bestimmen wir die Schnittpunkte des Graphen mit der x -Achse, also die Nullstellen der Funktion f :

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^3 - 4x &= 0 \\ \Leftrightarrow x(x^2 - 4) &= 0 \end{aligned}$$

Ein Produkt ist genau dann null, wenn mindestens ein Faktor null ist. Daher erhalten wir:

$$x = 0 \vee x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 2 \vee x = -2$$

Der Graph von f schneidet die x -Achse also in den Punkten $(-2|0)$, $(0|0)$ und $(2|0)$.

Aufgrund der Punktsymmetrie zum Ursprung reicht es, die Fläche im Intervall $[0; 2]$ zu berechnen und das Ergebnis zu verdoppeln.

Wir berechnen zunächst eine Stammfunktion von f :

$$F(x) = \int f(x) dx = \int (x^3 - 4x) dx = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + C$$

Der Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[0; 2]$ lässt sich nun wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} A_{[0;2]} &= \left| \int_0^2 f(x) dx \right| \\ &= \left| \left[\frac{x^4}{4} - 2x^2 \right]_0^2 \right| \\ &= \left| \frac{2^4}{4} - 2 \cdot 2^2 - \left(\frac{0^4}{4} - 2 \cdot 0^2 \right) \right| \\ &= |4 - 8 - 0| \\ &= |-4| \\ &= 4 \end{aligned}$$

Aufgrund der Punktsymmetrie ist die Fläche im Intervall $[-2; 0]$ gleich groß. Der gesamte Flächeninhalt zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[-2; 2]$ beträgt somit $2 \cdot 4 = 8$ Flächeneinheiten.

zu Aufgabe 2:

Gegeben sind die Punkte $A(2|4|5)$, $B(1|2|3)$ und $C(7|5|-3)$ im dreidimensionalen Koordinatensystem.

a) Prüfung der Orthogonalität von Vektoren:

Wir berechnen zunächst die Vektoren $\vec{BA}$ und $\vec{BC}$:

$$\begin{aligned} \vec{BA} &= \vec{OA} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \vec{BC} &= \vec{OC} - \vec{OB} = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zwei Vektoren sind genau dann orthogonal (senkrecht) zueinander, wenn ihr Skalarprodukt gleich null ist. Wir berechnen daher das Skalarprodukt von $\vec{BA}$ und $\vec{BC}$:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{BA} \circ \overrightarrow{BC} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\
 &= 1 \cdot 6 + 2 \cdot 3 + 2 \cdot (-6) \\
 &= 6 + 6 - 12 \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

Da das Skalarprodukt gleich null ist, stehen die Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$ senkrecht aufeinander. Das bedeutet, dass im Dreieck ABC bei B ein rechter Winkel vorliegt.

b) Bestimmung des vierten Eckpunkts eines Rechtecks:

Die Punkte A , B und C bilden zusammen mit einem vierten Punkt D ein Rechteck, wenn die gegenüberliegenden Seiten jeweils parallel und gleich lang sind. In einem Rechteck gilt außerdem, dass die Diagonalen $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ sich gegenseitig halbieren.

Eine Möglichkeit, den Punkt D zu bestimmen, besteht darin, den Vektor $\overrightarrow{BC}$ zu A zu addieren, da im Rechteck gegenüberliegende Seiten parallel und gleich lang sind:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AD} &= \overrightarrow{BC} \\
 \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} &= \overrightarrow{BC} \\
 \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC} \\
 \overrightarrow{OD} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -6 \end{pmatrix} \\
 \overrightarrow{OD} &= \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Der vierte Eckpunkt des Rechtecks hat somit die Koordinaten $D(8|7|-1)$.

Alternativ lässt sich D auch aus der Bedingung bestimmen, dass die Diagonalen $\overrightarrow{AC}$ und $\overrightarrow{BD}$ sich gegenseitig halbieren. Es muss also gelten: $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$. Diese Berechnung führt zum selben Ergebnis.

c) Bestimmung des Flächeninhalts des Rechtecks:

Der Flächeninhalt eines Rechtecks berechnet sich aus dem Produkt der Längen zweier benachbarter Seiten. In unserem Fall sind das die Längen der Strecken $\overline{AB}$ und $\overline{BC}$.

Wir berechnen zunächst die Längen der Vektoren $\overrightarrow{BA}$ und $\overrightarrow{BC}$:

$$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{6^2 + 3^2 + (-6)^2} = \sqrt{36 + 9 + 36} = \sqrt{81} = 9$$

Der Flächeninhalt des Rechtecks beträgt somit:

$$A = |\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}| = 3 \cdot 9 = 27 \text{ [FE]}$$

zu Aufgabe 3:

Gegeben ist ein Glücksrad mit zehn gleich großen Sektoren, von denen ein Sektor grün und neun Sektoren rot gefärbt sind. Ein Spieler gewinnt, wenn beim Drehen des Glücksrads ein grüner Sektor angezeigt wird.

- a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für "genau einmal grün": Bei zweimaligem Drehen des Glücksrads liegt ein Bernoulli-Experiment mit folgenden Parametern vor: - Anzahl der Versuche: $n = 2$ - Wahrscheinlichkeit für "grün" bei einem Versuch: $p = 0,1$ (da 1 von 10 Sektoren grün ist) - Wahrscheinlichkeit für rot bei einem Versuch: $1 - p = 0,9$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, bei zwei Versuchen genau k -mal erfolgreich zu sein (also genau k -mal "grün" zu erhalten), berechnet sich nach der Formel der Binomialverteilung:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k}$$

Für $n = 2$, $k = 1$, $p = 0,1$ und $1 - p = 0,9$ erhalten wir:

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= \binom{2}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^{2-1} \\ &= 2 \cdot 0,1 \cdot 0,9 \\ &= 0,18 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, bei zweimaligem Drehen des Glücksrads genau einmal "grün" zu erhalten, beträgt also 0,18 oder 18

Alternativ lässt sich dieses Ergebnis auch mit Hilfe eines Baumdiagramms herleiten. Dabei gibt es zwei mögliche Wege, um genau einmal "grün" zu erhalten: entweder beim ersten Drehen "grün" und beim zweiten rot, oder beim

ersten Drehen rot und beim zweiten "grün". Die Gesamtwahrscheinlichkeit ergibt sich als Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser beiden Wege:

$$\begin{aligned}P(\text{„genau einmal grün“}) &= P(\text{„grün, rot“}) + P(\text{„rot, grün“}) \\&= 0,1 \cdot 0,9 + 0,9 \cdot 0,1 \\&= 0,09 + 0,09 \\&= 0,18\end{aligned}$$

b) Bestimmung des Erwartungswerts und Beurteilung des Spiels:

Bei diesem Spiel muss der Spieler 3€ Einsatz zahlen und kann folgende Gewinne erzielen: - 0€, wenn kein grüner Sektor erscheint - 10€, wenn genau ein grüner Sektor erscheint - 20€, wenn zweimal ein grüner Sektor erscheint

Die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten berechnen wir mit der Binomialverteilung:

$$\begin{aligned}P(X = 0) &= \binom{2}{0} \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^2 = 1 \cdot 1 \cdot 0,81 = 0,81 \\P(X = 1) &= \binom{2}{1} \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^1 = 2 \cdot 0,1 \cdot 0,9 = 0,18 \\P(X = 2) &= \binom{2}{2} \cdot 0,1^2 \cdot 0,9^0 = 1 \cdot 0,01 \cdot 1 = 0,01\end{aligned}$$

Der Erwartungswert der Auszahlung berechnet sich als Summe der Produkte aus den möglichen Auszahlungen und ihren jeweiligen Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{aligned}E(X) &= 0€ \cdot P(X = 0) + 10€ \cdot P(X = 1) + 20€ \cdot P(X = 2) \\&= 0€ \cdot 0,81 + 10€ \cdot 0,18 + 20€ \cdot 0,01 \\&= 0€ + 1,8€ + 0,2€ \\&= 2€\end{aligned}$$

Der Erwartungswert der Auszahlung beträgt 2 €, während der Spieler einen Einsatz von 3 € zahlen muss. Im Durchschnitt verliert der Spieler also 1 € pro Spiel. Das Spiel ist daher für den Veranstalter vorteilhaft, da er langfristig mehr Geld einnimmt, als er an Gewinnen auszahlt.

1.2.2 Wahlpflichtaufgaben

zu Aufgabe 4:

Gegeben ist der Graph einer Funktion f in einem Koordinatensystem.

a) Bestimmung eines Integralwerts anhand des Graphen:

Der Wert des bestimmten Integrals $\int_{-3}^{-1,5} f(x) dx$ entspricht dem Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x -Achse im Intervall $[-3; -1,5]$.

Im Koordinatensystem ist zu erkennen, dass die Fläche zwischen dem Graphen und der x -Achse im Intervall $[-3; -1,5]$ etwa 8 Kästchen umfasst. Da laut Angabe vier Kästchen einer Flächeneinheit entsprechen, ergibt sich:

$$\int_{-3}^{-1,5} f(x) dx \approx 8 \cdot \frac{1}{4} = 2$$

Der Wert des Integrals beträgt also ungefähr 2.

b) Analyse der Transformation zum Graphen von u :

Der Graph der Funktion u entsteht aus dem Graphen von f durch folgende Transformationen:

1. Spiegelung an der x -Achse: Der Graph von $-f$ ist das Spiegelbild des Graphen von f an der x -Achse.
2. Verschiebung um 2 Einheiten nach oben: Der Graph von $-f(x)+2$ ergibt sich durch Verschiebung des Graphen von $-f$ um 2 Einheiten in positive y -Richtung.

Diese Transformationen haben folgende Auswirkungen auf charakteristische Punkte:

- Der Tiefpunkt des Graphen von f bei $(0|0)$ wird zu einem Hochpunkt des Graphen von $-f$ bei $(0|0)$.
- Nach der Verschiebung um 2 Einheiten nach oben hat dieser Hochpunkt des Graphen von u die Koordinaten $(0|2)$.

Der Graph der Funktion u hat also einen Hochpunkt bei $H_u(0|2)$.

zu Aufgabe 5:

Gegeben sind die Funktionen $g(x) = e^x$ und $h(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$.

a) Bestimmung der Steigung der Tangente:

Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion im Punkt $(x_0|f(x_0))$ entspricht dem Wert der ersten Ableitung an der Stelle x_0 .

Für die Funktion $g(x) = e^x$ berechnen wir die erste Ableitung:

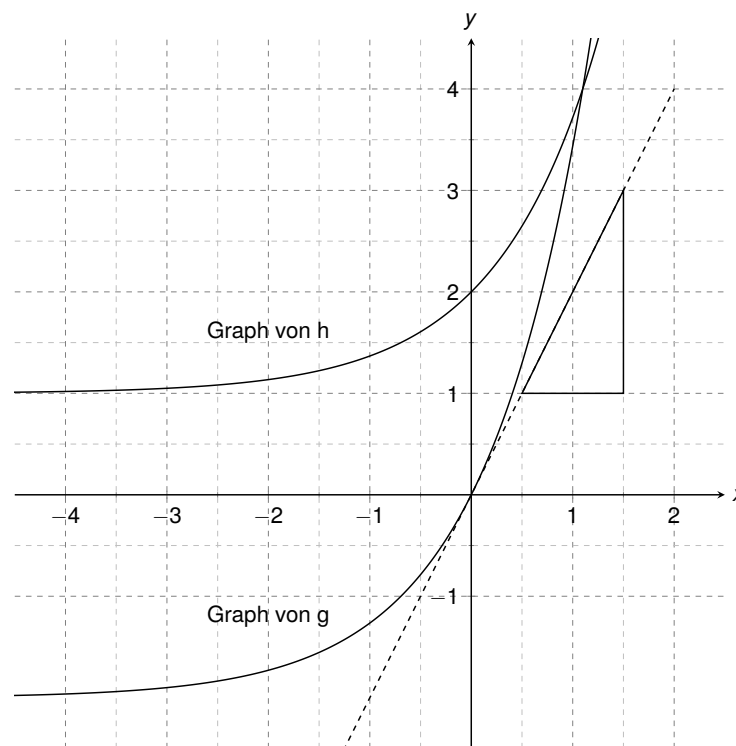
$$g'(x) = 2e^x$$

An der Stelle $x = 0$ ergibt sich somit:

$$g'(0) = 2e^0 = 2 \cdot 1 = 2$$

Die Steigung der Tangente an den Graphen von g an der Stelle $x = 0$ beträgt also 2.

Mithilfe des Steigungsdreiecks lässt sich die Steigung der Tangente des Graphen von g an der Stelle $x = 0$ bestimmen. Dies entspricht $g'(0)$



b) Überprüfung der Aussage über die Parallelität der Tangenten:

Wir berechnen zunächst die Ableitung der Funktion $h(x) = 2 \cdot e^{\frac{x}{2}}$:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \left(2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \right)' \\ &= 2 \cdot e^{\frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \\ &= e^{\frac{x}{2}} \end{aligned}$$

An der Stelle $x = 0$ ergibt sich:

$$h'(0) = e^{\frac{0}{2}} = e^0 = 1$$

Die Tangente an den Graphen von g an der Stelle $x = 0$ hat die Steigung $g'(0) = 2$, während die Tangente an den Graphen von h an derselben Stelle die Steigung $h'(0) = 1$ hat. Da die Steigungen unterschiedlich sind, verlaufen die Tangenten nicht parallel zueinander.

zu Aufgabe 6:

Gegeben sind die Geraden $g : \tilde{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $h : \tilde{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit $r \in \mathbb{R}$ sowie die Punkte $P(0|0|3)$ und $R(2|1|1)$ auf der Geraden g .

a) Bestimmung des Schnittpunkts der Geraden:

Um den Schnittpunkt der Geraden g und h zu bestimmen, setzen wir die Parameterdarstellungen gleich und lösen nach den Parametern t und r auf:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Komponentenweise ergibt sich:

$$\begin{aligned} 0 + 2t &= 4 + r \\ 0 + t &= 2 + 0 \\ 3 - 2t &= -1 + 2r \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt unmittelbar:

$$t = 2$$

Einsetzen von $t = 2$ in die erste Gleichung liefert:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 2 &= 4 + r \\ 4 &= 4 + r \\ r &= 0 \end{aligned}$$

Zur Kontrolle überprüfen wir die dritte Gleichung:

$$3 - 2 \cdot 2 = -1 + 2 \cdot 0$$

$$3 - 4 = -1$$

$$-1 = -1 \checkmark$$

Die Parameter $t = 2$ und $r = 0$ erfüllen also das Gleichungssystem. Eingesetzt in die Parameterdarstellung von g erhalten wir den Schnittpunkt:

$$\begin{aligned}\vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Schnittpunkt der Geraden g und h ist somit der Punkt $S(4|2|-1)$.

Alternativ können wir auch den Parameter $r = 0$ in die Parameterdarstellung von h einsetzen und erhalten:

$$\begin{aligned}\tilde{x} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

was das Ergebnis bestätigt.

b) Bestimmung des Punktes P' :

Der Punkt P' hat vom Punkt R den Abstand $|\vec{PR}|$ und liegt auf der gleichen Seite von R wie der Punkt P . Wir können P' also bestimmen, indem wir von P aus zweimal den Vektor $\vec{PR}$ addieren:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PR} \\
 &= \overrightarrow{OP} + 2 \cdot (\overrightarrow{OR} - \overrightarrow{OP}) \\
 &= \overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OR} - 2\overrightarrow{OP} \\
 &= -\overrightarrow{OP} + 2\overrightarrow{OR}
 \end{aligned}$$

Mit $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{OR} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP'} &= -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Der Punkt P' hat also die Koordinaten $P'(4|2|-1)$. Wir stellen fest, dass P' mit dem Schnittpunkt S der Geraden g und h übereinstimmt.

Alternativ können wir auch direkt mit den Vektoren $\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{PR} =$

$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ rechnen:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OP'} &= \overrightarrow{OP} + 2 \cdot \overrightarrow{PR} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

zu Aufgabe 7:

Gegeben ist ein Quader $ABCDEFGH$ mit den Eckpunkten $A(1|1|0)$, $B(4|1|0)$, $E(1|1|4)$ und $H(1|7|4)$.

a) Bestimmung der Koordinaten des Punktes G :

Der Punkt G ist eine Ecke des Quaders $ABCDEFGH$, die gegenüber von A liegt und nicht auf derselben Seitenfläche wie A liegt. Wir können die Koordinaten von G bestimmen, indem wir von den bekannten Punkten ausgehen.

In einem Quader liegen gegenüberliegende Ecken auf einer Raumdiagonale. Eine Möglichkeit, G zu bestimmen, ist die Addition der Vektoren $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AH}$ zum Punkt A :

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AH} \\
 &= \overrightarrow{OA} + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + (\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}) \\
 &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA} \\
 &= \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OA}
 \end{aligned}$$

Einsetzen der Koordinaten ergibt:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OG} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Der Punkt G hat somit die Koordinaten $G(4|7|4)$.

Alternativ können wir auch direkt die Vektoren $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AH}$ oder $\overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AB}$ verwenden, was zu demselben Ergebnis führt.

b) Bestimmung der Koordinaten des Punktes H' :

Der Schnittpunkt S der Raumdiagonalen des Quaders ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AG}$ bzw. auch der Strecke $\overline{BH}$. Wir berechnen zunächst die Koordinaten von S :

$$\begin{aligned}
 S &= \frac{1}{2} \cdot (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OG}) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 2,5 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Der Punkt H' entsteht durch Verschiebung von H entlang $\overrightarrow{SO} = \begin{pmatrix} -2,5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}$

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH'} &= \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{SO} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2,5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1,5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt H' hat somit die Koordinaten $H'(-1,5|3|2)$.

c) Bestimmung des Punktes G' :

Der Punkt G' berechnet sich analog zu H' und es gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OG'} &= \overrightarrow{OG} + \overrightarrow{SO} \\ &= \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2,5 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1,5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Der Punkt G' hat also die Koordinaten $G'(1,5|3|2)$. Da alle Koordinaten positiv sind, liegt G' im ersten Oktanten des Koordinatensystems.

zu Aufgabe 8:

Bei einem Spiel werden Glitzerbälle mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% verteilt.

a) Berechnung der Wahrscheinlichkeit für "drei Kinder mit Glitzerball":

Wir betrachten die Zufallsgröße X : „Anzahl der Kinder, die einen Glitzerball erhalten“. Diese Zufallsgröße ist binomialverteilt mit den Parametern $n = 3$ (drei Kinder) und $p = 0,4$ (Wahrscheinlichkeit für einen Glitzerball).

Die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Kinder einen Glitzerball erhalten, berechnet sich nach der Formel der Binomialverteilung:

$$\begin{aligned}P(X = 3) &= \binom{3}{3} \cdot 0,4^3 \cdot 0,6^{3-3} \\&= 1 \cdot 0,4^3 \cdot 1 \\&= 0,4^3 \\&= 0,064\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt also 0,064 oder 6,4%. Da dieser Wert kleiner als 10% ist, kann die Aussage als selten eingestuft werden.

Alternativ lässt sich dieses Ergebnis auch anhand eines Baumdiagramms herleiten. Für den Fall, dass alle drei Kinder einen Glitzerball erhalten, müssen alle drei Pfade des Baumdiagramms mit der Wahrscheinlichkeit 0,4 gewählt werden. Die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis ist somit $0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,4 = 0,064$.

b) Interpretation eines Wahrscheinlichkeitsausdrucks:

Der Ausdruck $\binom{4}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^4 + \binom{4}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^3$ beschreibt eine Summe von Wahrscheinlichkeiten in einer binomialverteilten Situation mit folgenden Parametern:

- Anzahl der Versuche: $n = 4$ (vier Kinder)
- Wahrscheinlichkeit für Erfolg: $p = 0,4$ (Wahrscheinlichkeit für einen Glitzerball)

Der erste Summand $\binom{4}{0} \cdot 0,4^0 \cdot 0,6^4$ entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(X = 0)$, dass keines der vier Kinder einen Glitzerball erhält.

Der zweite Summand $\binom{4}{1} \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^3$ entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(X = 1)$, dass genau eines der vier Kinder einen Glitzerball erhält.

Die Summe $P(X = 0) + P(X = 1) = P(X \leq 1)$ gibt also die Wahrscheinlichkeit an, dass höchstens eines der vier Kinder einen Glitzerball erhält. Anders ausgedrückt ist dies die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens drei der vier Kinder keinen Glitzerball erhalten.

zu Aufgabe 9:

Betrachtet wird eine Glücksspielsituation mit einer binomialverteilten Zufallsgröße.

a) Bestimmung der Anzahl der Versuche:

Für eine binomialverteilte Zufallsgröße mit Parametern n (Anzahl der Versuche) und p (Erfolgswahrscheinlichkeit) berechnet sich die Standardabweichung σ nach der Formel:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1 - p)}$$

Gegeben ist $\sigma = \sqrt{3}$ und $p = \frac{1}{4}$. Wir setzen diese Werte in die Formel ein und lösen nach n auf:

$$\begin{aligned}\sqrt{3} &= \sqrt{n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}} \\ 3 &= n \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4} \\ 3 &= n \cdot \frac{3}{16} \\ \frac{3}{\frac{3}{16}} &= n \\ 3 \cdot \frac{16}{3} &= n \\ 16 &= n\end{aligned}$$

Die Anzahl der Versuche beträgt somit $n = 16$.

b) Bestimmung der Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 4)$:

Für die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq 4)$ gilt:

$$P(X \leq 4) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) + P(X = 4)$$

Alternativ können wir auch schreiben:

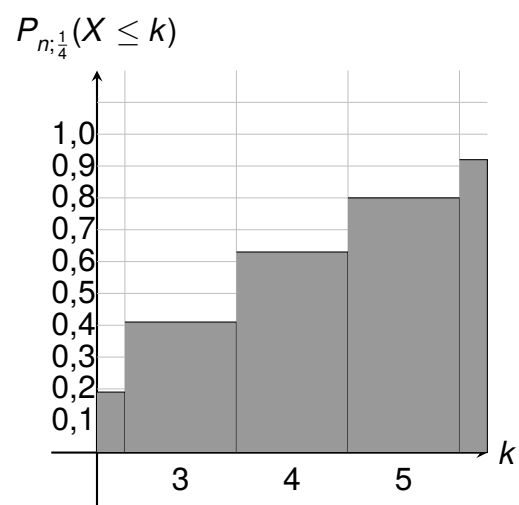
$$P(X \leq 4) = P(X \leq 3) + P(X = 4)$$

Aus der Abbildung 5 können wir ablesen, dass $P(X \leq 3) \approx 0,40$ und aus Abbildung 4, dass $P(X = 4) \approx 0,23$.

Somit erhalten wir:

$$P(X \leq 4) \approx 0,40 + 0,23 = 0,63$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße höchstens den Wert 4 annimmt, beträgt also ungefähr 0,63 oder 63%.



1.2.3 Prüfungsteil B

Analysis

zu Aufgabe 1:

- a) Gegeben ist die Funktion $f(t) = 25 - 20 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$, welche die Temperatur einer Flüssigkeit in einem Glas nach der Entnahme aus einem Kühlschrank in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten modelliert.

- 1) i) Der Zeitpunkt, an dem das Glas aus dem Kühlschrank genommen wird, entspricht $t = 0$. Um die Temperatur zu diesem Zeitpunkt zu bestimmen, setzen wir $t = 0$ in die Funktion ein:

$$f(0) = 25 - 20 \cdot e^{-0,014 \cdot 0} = 25 - 20 \cdot 1 = 5$$

Die Temperatur der Flüssigkeit bei Entnahme aus dem Kühlschrank beträgt somit 5°C .

- ii) Um den Zeitpunkt zu bestimmen, zu dem die Wassertemperatur 12°C beträgt, lösen wir die Gleichung $f(t) = 12$:

$$25 - 20 \cdot e^{-0,014 \cdot t} = 12$$

$$-20 \cdot e^{-0,014 \cdot t} = 12 - 25 = -13$$

$$e^{-0,014 \cdot t} = \frac{13}{20}$$

$$-0,014 \cdot t = \ln\left(\frac{13}{20}\right)$$

$$t = \frac{\ln\left(\frac{13}{20}\right)}{-0,014} \approx 30,77$$

Etwa 31 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank hat das Wasser eine Temperatur von 12°C .

- 2) i) Die Ableitung der Funktion $f(t) = 25 - 20 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$ berechnet sich mit der Kettenregel:

$$f'(t) = -20 \cdot (-0,014) \cdot e^{-0,014 \cdot t} = 0,28 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$$

Der Wert der Ableitung zum Zeitpunkt $t = 30$ gibt die momentane Änderungsrate der Temperatur an:

$$f'(30) = 0,28 \cdot e^{-0,014 \cdot 30} \approx 0,18 \left[\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}} \right]$$

30 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank erhöht sich die Wassertemperatur mit einer momentanen Änderungsrate von etwa $0,18 \left[\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}} \right]$.

- ii) Die mittlere Änderungsrate im Intervall $[0; 30]$ entspricht der Steigung der Sekante zwischen den Punkten $(0|f(0))$ und $(30|f(30))$ und berechnet sich folgendermaßen:

$$\frac{f(30) - f(0)}{30 - 0} = \frac{f(30) - 5}{30} \approx \frac{11,86 - 5}{30} \approx 0,229$$

In den ersten 30 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank nimmt die Wassertemperatur durchschnittlich um etwa $0,23 \left[\frac{^\circ\text{C}}{\text{min}} \right]$ zu.

- 3) Die Raumtemperatur beträgt 25°C und die Wassertemperatur zum Zeitpunkt t ist $f(t)$. Die Differenz zwischen Raum- und Wassertemperatur beträgt somit $25 - f(t)$. Die momentane Änderungsrate der Temperatur ist proportional zu dieser Temperaturdifferenz. Es soll also eine Konstante c gefunden werden, für die gilt:

$$25 - f(t) = c \cdot f'(t)$$

Wir setzen $f(t) = 25 - 20 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$ und $f'(t) = 0,28 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$ ein:

$$25 - (25 - 20 \cdot e^{-0,014 \cdot t}) = c \cdot 0,28 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$$

$$20 \cdot e^{-0,014 \cdot t} = c \cdot 0,28 \cdot e^{-0,014 \cdot t}$$

$$20 = c \cdot 0,28$$

$$c = \frac{20}{0,28} = \frac{500}{7} \approx 71,43$$

Es gibt also eine Konstante $c = \frac{500}{7}$, die die geforderte Bedingung erfüllt.

- 4) Mit $m = \frac{a+b}{2}$ wird der Mittelwert m zweier Werte a und b berechnet. In diesem Kontext suchen wir den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur gleich dem Mittelwert aus Anfangstemperatur $f(0) = 5^\circ\text{C}$ und Raumtemperatur 25°C ist.

Der gesuchte Mittelwert ist $\frac{5+25}{2} = 15^\circ\text{C}$.

Eine entsprechende Aufgabenstellung könnte lauten:

Bestimmen Sie den Zeitpunkt t , zu dem die Wassertemperatur den Mittelwert aus der Anfangstemperatur und der Raumtemperatur hat.

- b) Gegeben ist die Funktion $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$.

- 1) Um den Definitionsbereich der Funktion $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$ zu bestimmen, betrachten wir den Definitionsbereich der einzelnen Faktoren und ihre Verknüpfung.

Da die Exponentialfunktion e^x für alle reellen Zahlen x definiert ist, wird der Definitionsbereich nur durch weitere Bedingungen eingeschränkt.

Für den Wertebereich benötigen wir Werte von x , für die $h(x) > 0$ gilt. Die Exponentialfunktion e^x ist stets positiv. Daher ist $h(x)$ genau dann positiv, wenn auch $(1 - x^2) > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}1 - x^2 &> 0 \\x^2 &< 1 \\-1 &< x < 1\end{aligned}$$

Der Definitionsbereich von h , für den $h(x) > 0$ gilt, ist somit das offene Intervall $(-1; 1)$.

- 2) Die Steigung der Tangente an den Graphen einer Funktion h im Punkt $P(a|h(a))$ entspricht dem Wert der Ableitung $h'(a)$. Es ist gegeben, dass im Punkt $P(0|1)$ eine Tangente u mit der Steigung $h'(0) = 1$ existiert. Die Ableitung der Funktion $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$ berechnen wir mithilfe der Produktregel:

$$\begin{aligned}h'(x) &= (1 - x^2)' \cdot e^x + (1 - x^2) \cdot (e^x)' \\&= -2x \cdot e^x + (1 - x^2) \cdot e^x \\&= (-2x + 1 - x^2) \cdot e^x \\&= (1 - x^2 - 2x) \cdot e^x\end{aligned}$$

An der Stelle $x = 0$ ergibt sich:

$$h'(0) = (1 - 0^2 - 2 \cdot 0) \cdot e^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Um zu bestimmen, an welcher weiteren Stelle die Tangente an den Graphen von h parallel zur Tangente u ist, müssen wir die Gleichung $h'(a) = 1$ lösen:

$$(1 - a^2 - 2a) \cdot e^a = 1$$

Diese Gleichung kann nur mithilfe des Taschenrechners gelöst werden und ergibt
 $a \approx -0,62$.

Die x -Koordinate des Punktes Q ist auf zwei Nachkommastellen gerundet $-0,62$.

- 3) Um Wendestellen zu bestimmen, berechnen wir zunächst die zweite Ableitung der Funktion h :

$$\begin{aligned}h''(x) &= ((1 - x^2 - 2x) \cdot e^x)' \\&= (1 - x^2 - 2x)' \cdot e^x + (1 - x^2 - 2x) \cdot (e^x)' \\&= (-2x - 2) \cdot e^x + (1 - x^2 - 2x) \cdot e^x \\&= [(-2x - 2) + (1 - x^2 - 2x)] \cdot e^x \\&= (1 - x^2 - 2x - 2x - 2) \cdot e^x \\&= (1 - x^2 - 4x - 2) \cdot e^x \\&= (-x^2 - 4x - 1) \cdot e^x\end{aligned}$$

Die notwendige Bedingung für eine Wendestelle lautet $h''(x) = 0$:

$$(-x^2 - 4x - 1) \cdot e^x = 0$$

Da e^x für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist, folgt:

$$-x^2 - 4x - 1 = 0$$

Diese quadratische Gleichung lösen wir mit der Mitternachtsformel:

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-1)}}{2 \cdot (-1)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4}}{-2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{-2}$$

Mit $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ erhalten wir:

$$x = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = -2 \pm \sqrt{3}$$

Die Lösungen sind somit $x_{W_1} = -2 + \sqrt{3} \approx -0,27$ und $x_{W_2} = -2 - \sqrt{3} \approx -3,73$.

Die hinreichende Bedingung für Wendestellen ist $h''(x) = 0$ und $h'''(x) \neq 0$. Dazu berechnen wir die dritte Ableitung:

$$\begin{aligned} h'''(x) &= [(-x^2 - 4x - 1) \cdot e^x]' \\ &= (-x^2 - 4x - 1)' \cdot e^x + (-x^2 - 4x - 1) \cdot (e^x)' \\ &= (-2x - 4) \cdot e^x + (-x^2 - 4x - 1) \cdot e^x \\ &= [(-2x - 4) + (-x^2 - 4x - 1)] \cdot e^x \\ &= (-x^2 - 6x - 5) \cdot e^x \end{aligned}$$

Einsetzen der Wendestellen:

$$\begin{aligned} h'''(-2 + \sqrt{3}) &= [-(-2 + \sqrt{3})^2 - 6 \cdot (-2 + \sqrt{3}) - 5] \cdot e^{-2 + \sqrt{3}} \\ &\approx -2,65 \neq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h'''(-2 - \sqrt{3}) &= [-(-2 - \sqrt{3})^2 - 6 \cdot (-2 - \sqrt{3}) - 5] \cdot e^{-2 - \sqrt{3}} \\ &\approx 0,08 \neq 0 \end{aligned}$$

Da beide Werte von h''' an den Stellen x_{W_1} und x_{W_2} ungleich null sind, handelt es sich tatsächlich um Wendestellen.

Die Steigungsfunktion entspricht der ersten Ableitung $h'(x)$. Ein Maximum der Steigungsfunktion liegt an der Stelle x_0 vor, wenn $h''(x_0) = 0$ und $h'''(x_0) < 0$. Diese Bedingung ist an der Stelle $x_{W_1} = -2 + \sqrt{3}$ erfüllt, da $h'''(-2 + \sqrt{3}) \approx -2,65 < 0$.

Die maximale Steigung beträgt:

$$\begin{aligned}
 h'(-2 + \sqrt{3}) &= [1 - (-2 + \sqrt{3})^2 - 2 \cdot (-2 + \sqrt{3})] \cdot e^{-2+\sqrt{3}} \\
 &= (1 - (4 - 4\sqrt{3} + 3) + 4 - 2\sqrt{3}) \cdot e^{-2+\sqrt{3}} \\
 &= (1 - 7 + 4\sqrt{3} + 4 - 2\sqrt{3}) \cdot e^{-2+\sqrt{3}} \\
 &= (-2 + 2\sqrt{3}) \cdot e^{-2+\sqrt{3}} \\
 &\approx 1,12
 \end{aligned}$$

- 4) i) Um die Extremstellen der Funktion h zu bestimmen, suchen wir die Nullstellen der ersten Ableitung $h'(x) = (1 - x^2 - 2x) \cdot e^x$. Da die Exponentialfunktion e^x für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist, müssen wir die Nullstellen des Terms $(1 - x^2 - 2x)$ finden:

$$1 - x^2 - 2x = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

Die Lösungen sind $x_1 = -1 + \sqrt{2} \approx 0,414$ und $x_2 = -1 - \sqrt{2} \approx -2,414$.

Von diesen beiden Werten liegt nur $x_1 = -1 + \sqrt{2}$ im vorgegebenen Intervall $[0; 1]$.

Für die hinreichende Bedingung einer Extremstelle prüfen wir das Vorzeichen der zweiten Ableitung:

$$h''(-1 + \sqrt{2}) = (-(-1 + \sqrt{2})^2 - 4 \cdot (-1 + \sqrt{2}) - 1) \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \approx -4,3 < 0$$

Da die zweite Ableitung negativ ist, handelt es sich um einen Hochpunkt. Der Funktionswert an dieser Stelle beträgt:

$$\begin{aligned}
 h(-1 + \sqrt{2}) &= (1 - (-1 + \sqrt{2})^2) \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \\
 &= (1 - (1 - 2\sqrt{2} + 2)) \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \\
 &= (1 - 3 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \\
 &= (-2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-1+\sqrt{2}} \\
 &\approx 1,254
 \end{aligned}$$

Der Hochpunkt H hat die Koordinaten $H(-1 + \sqrt{2} | (-2 + 2\sqrt{2}) \cdot e^{-1+\sqrt{2}}) \approx (0,414 | 1,254)$.

- ii) Um die Nullstellen der Funktion h zu bestimmen, lösen wir die Gleichung $h(x) = 0$:

$$(1 - x^2) \cdot e^x = 0$$

Da e^x für alle $x \in \mathbb{R}$ positiv ist, folgt:

$$1 - x^2 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Die Nullstellen der Funktion h liegen also bei $x = -1$ und $x = 1$. Die Abszisse des Hochpunkts unterteilt das Intervall $[-1; 1]$ in zwei Teilintervalle. Für die Berechnung der Flächeninhalte zwischen dem Graphen und der x -Achse bestimmen wir die Integrale:
Linke Teilfläche:

$$\int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} (1 - x^2) \cdot e^x dx \approx 0,952 \text{ [FE]}$$

Rechte Teilfläche:

$$\int_{-1+\sqrt{2}}^1 (1 - x^2) \cdot e^x dx \approx 0,519 \text{ [FE]}$$

Die linke Teilfläche ist größer als die rechte. Das Verhältnis der größeren Teilfläche zur Gesamtfläche beträgt:

$$\frac{\int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} (1 - x^2) \cdot e^x dx}{\int_{-1}^1 (1 - x^2) \cdot e^x dx} \approx \frac{0,952}{0,952 + 0,519} \approx 0,647$$

Der Anteil des größeren Flächeninhalts am Flächeninhalt A beträgt ungefähr 64,7%.

- 5) Mit den Punkten $(0|0)$, $(w|0)$ und $(w|h(w))$ ist ein rechtwinkliges Dreieck gegeben. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks berechnet sich nach der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot \text{Grundseite} \cdot \text{Höhe}$.

In diesem Fall beträgt die Grundseite w und die Höhe $h(w) = (1 - w^2) \cdot e^w$. Damit ergibt sich für den Flächeninhalt die Funktion:

$$a(w) = \frac{1}{2} \cdot w \cdot h(w) = \frac{1}{2} \cdot (w - w^3) \cdot e^w, \quad 0 < w < 1$$

Um das Maximum dieser Funktion zu bestimmen, leiten wir sie nach w ab und setzen die Ableitung gleich null:

$$\begin{aligned} a'(w) &= \frac{1}{2} \cdot [(w - w^3) \cdot e^w + (1 - 3w^2) \cdot e^w] \\ &= \frac{1}{2} \cdot [(w - w^3 + 1 - 3w^2) \cdot e^w] \\ &= \frac{1}{2} \cdot e^w \cdot [1 + w - 3w^2 - w^3] \end{aligned}$$

Die Gleichung $a'(w) = 0$ führt zu:

$$1 + w - 3w^2 - w^3 = 0$$

Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden. Wir erhalten die Lösungen $w_1 \approx -3,214$, $w_2 \approx -0,461$ und $w_3 \approx 0,675$. Da wir nur an Werten im Intervall $(0; 1)$ interessiert sind, kommt nur $w_3 \approx 0,675$ in Frage.

Um zu überprüfen, ob es sich um ein Maximum handelt, berechnen wir die zweite Ableitung und werten sie an der Stelle w_3 aus:

$$a''(0,675) \approx -4,337 < 0$$

Da die zweite Ableitung negativ ist, handelt es sich tatsächlich um ein Maximum. Der maximale Flächeninhalt des Dreiecks beträgt:

$$a(0,675) \approx 0,361 \text{ [FE]}$$

Geometrie

zu Aufgabe 1:

- a) 1) Der Punkt A ist der Lotfußpunkt des Lotes von D auf die x_1x_2 -Ebene. Die x_1 - und die x_2 -Koordinate bleiben erhalten und die x_3 -Koordinate nimmt den Wert null an. Somit hat A die Koordinaten A(6|0|0).

Alternativ:

Da es sich um ein gerades Prisma handelt, verlaufen die Kanten in der Grund- und Deckfläche parallel und sind gleich lang.

$$\begin{aligned}\vec{OA} &= \vec{OC} + \vec{CD} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A(6|0|0)\end{aligned}$$

- 2) Ist φ der Winkel, der von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossen wird, so kann φ berechnet werden durch:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Der Winkel $\delta = \angle EDF$ wird eingeschlossen von den Vektoren $\vec{DE}$ und $\vec{DF}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}\cos(\delta) &= \frac{\vec{DE} \circ \vec{DF}}{|\vec{DE}| \cdot |\vec{DF}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right|} \\ &= \frac{36}{10 \cdot 6} = 0,6 \Rightarrow \delta \approx 53,13^\circ\end{aligned}$$

- 3) Die Oberfläche eines geraden Prismas mit der Grundfläche G , dem Grundflächenumfang U und der Höhe h berechnet sich nach der Formel

$$O = 2 \cdot G + U \cdot h$$

Zwei Seiten des Grundflächendreiecks liegen auf der x_1 - bzw. x_2 -Achse, das Dreieck ist somit rechtwinklig.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b berechnet sich nach der Formel $G = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Für die benötigten Längen gilt:

$$|\vec{FD}| = \left| \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 6 \text{ [LE]},$$

$$|\vec{FE}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 8 \text{ [LE]},$$

$$|\vec{CF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = 5 \text{ [LE] und}$$

$$|\vec{DE}| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{36 + 64} = 10 \text{ [LE]}$$

Einsetzen der berechneten Größen führt zu:

$$O = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 + (6 + 8 + 10) \cdot 5 = 48 + 120 = 168 \text{ [FE]}$$

- 4) Eine Berechnung des Abstandes des Punktes M zu den Punkten D , E

bzw. F ergibt:

$$|\vec{MD}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ [LE]}$$

$$|\vec{ME}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ [LE]}$$

$$|\vec{MF}| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{9 + 16} = 5 \text{ [LE]}$$

Der Abstand von M zu den Punkten D, E bzw. F ist gleich. Die Punkte D, E und F liegen folglich auf einem Kreis um M mit dem Radius 5 LE.

Alternativ: mithilfe der Umkehrung des Satzes des Thales

Der Punkt M ist der Mittelpunkt der Strecke $\overline{DE}$, denn es gilt:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \left(\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$$

Das Dreieck DEF ist rechtwinklig mit einem rechten Winkel beim Punkt F. Nach der Umkehrung des Satzes des Thales gilt nun: Wenn bei einem rechtwinkligen Dreieck der rechte Winkel bei F ist, dann liegt der Punkt F auf einem Kreis, der den Durchmesser $\overline{DE}$ hat. Daher liegen die Punkte D, E und F auf einem Kreis mit dem Mittelpunkt M.

- b) 1) Mit dem Punkt F als Anbindungspunkt und den Spannvektoren $\vec{FM}$ und $\vec{FS}$ erhält man als Parameterform der Ebene:

$$\begin{aligned} W : \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + m \cdot \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) + n \cdot \left(\begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \right) \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + m \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + n \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}; m, n \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

- 2) Umschreiben der Koordinaten von P in die Vektorschreibweise ergibt:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}; 0 \leq r \leq 5$$

P gibt somit alle Punkte der Strecke $\overline{AD}$ an.

In Schritt (II) stehen auf der linken Seite der Gleichung die Koordinaten der Punkte P der Strecke $\overline{AD}$ und auf der rechten Seite die Koordinaten der Ebene W.

Durch das Lösen des Gleichungssystems wird der Punkt der Strecke $\overline{AD}$ bestimmt, der in der Ebene W liegt.

Passende Aufgabenstellung: Ermitteln Sie die Koordinaten des Punktes P der Strecke $\overline{AD}$, der in der Ebene W liegt.

- 3) Durch Einschränkung des Definitionsbereichs der Geraden h mit dem Anbindungspunkt S und dem Richtungsvektor $\overrightarrow{SM}$ erhält man die Gleichung für die Strecke $\overline{SM}$.

$$s_{SM} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}; 0 \leq q \leq 1$$

Die Koordinaten der Geraden g werden mit den Koordinaten der Strecke $\overline{SM}$ gleichgesetzt:

$$\begin{pmatrix} -1,5 \\ 8 \\ 10 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} -4,5 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Diese Vektorgleichung wird in Koordinatengleichungen umgeschrieben. Dadurch ergibt sich das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{array}{ll} \text{I} & -1,5 + 7,5k = 7,5 - 4,5q \\ \text{II} & 8 = 4q \Rightarrow q = 2 \\ \text{III} & 10 - 5k = 5q \end{array}$$

Einsetzen von $q = 2$ in Gleichung III führt zu:

$$\begin{aligned} 10 - 5k &= 10 \\ \Rightarrow k &= 0 \end{aligned}$$

Eine Probe mit Gleichung I ergibt:

$$\begin{aligned} -1,5 &= 7,5 - 9 \\ -1,5 &= -1,5 \quad (\checkmark) \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem besitzt die Lösung $k = 0$ und $q = 2$.

Da $q = 2 \notin [0; 1]$ ist, schneidet die Gerade g die Strecke $\overline{SM}$ nicht.

- 4) Das Dreieck MFS_t ist rechtwinklig im Punkt M, wenn die Vektoren $\overrightarrow{MF}$ und $\overrightarrow{MS_t}$ senkrecht aufeinander stehen.

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ stehen senkrecht aufeinander, wenn das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{u} \circ \vec{v} = 0$ ist.

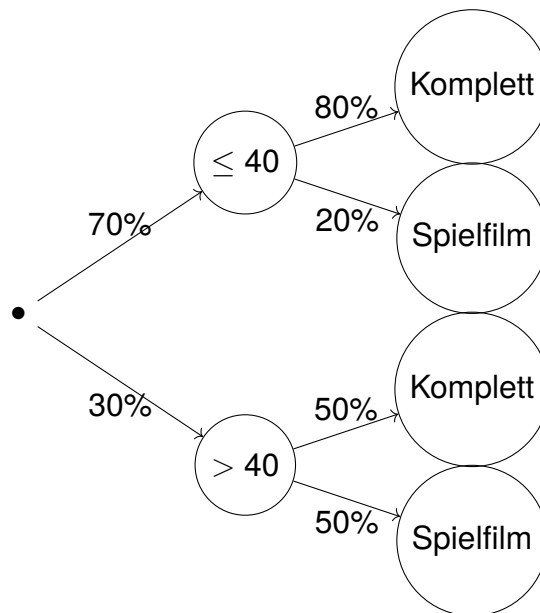
$$\begin{aligned}\overrightarrow{MF} \circ \overrightarrow{MS_t} &= 0 \\ \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} t-3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix} &= 0 \\ -3t + 9 + 16 &= 0 \\ \Rightarrow t &= \frac{25}{3}\end{aligned}$$

Für $t = \frac{25}{3}$ ist das Dreieck MFS_t rechtwinklig im Punkt M.

Stochastik

zu Aufgabe 1:

- a) 1) Als Grundgesamtheit werden zunächst alle Abonnenten betrachtet. Die relevanten Ereignisse sind ein Baumdiagramm mit zwei Stufen.



- 2) Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Abonnent höchstens 40 Jahre alt ist, unter der Bedingung, dass er das Komplettpaket gewählt hat.

Mithilfe der Pfadregeln berechnen wir:

$$\begin{aligned}
 P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\
 &= \frac{P(A) \cdot P(B|A)}{P(A) \cdot P(B|A) + P(\bar{A}) \cdot P(B|\bar{A})} \\
 &= \frac{0,7 \cdot 0,8}{0,7 \cdot 0,8 + 0,3 \cdot 0,5} \\
 &= \frac{0,56}{0,56 + 0,15} \\
 &= \frac{0,56}{0,71} \\
 &\approx 0,7887
 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit 78,87%.

- 3) Wahrscheinlichkeit für genau 70 Abonnenten unter 40 Jahren:

Sei X die Zufallsgröße mit:

X : Anzahl der Abonnenten, die höchstens 40 Jahre alt sind

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis A beträgt:

$$P(A) = 0,7$$

Da 100 Abonnenten zufällig ausgewählt werden, können wir X als binomialverteilt annehmen:

$$X \sim B(100; 0,7)$$

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit:

$$P_{0,7}^{100}(X = 70) \approx 0,0868$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unter 100 zufällig ausgewählten Abonnenten genau 70 höchstens 40 Jahre alt sind, beträgt somit 8,68%.

- 4) Bestimmung der Mindestanzahl an Abonnenten:

Sei Z die Zufallsgröße mit:

Z : Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\bar{A}$ beträgt:

$$\begin{aligned} P(\bar{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0,7 \\ &= 0,3 \end{aligned}$$

Da die Grundgesamtheit sehr groß ist, können wir Z als binomialverteilt annehmen:

$$Z \sim B(n; 0,3)$$

Gesucht ist das kleinste n mit:

$$P_{0,3}^n(Z \geq 21) \geq 0,99$$

Systematisches Probieren ergibt:

$$P_{0,3}^{103}(Z \geq 21) \approx 0,9895 < 0,99$$

$$P_{0,3}^{104}(Z \geq 21) \approx 0,9910 > 0,99$$

Somit ist $n = 104$ die gesuchte Mindestanzahl an Abonnenten, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mehr als 20 Personen älter als 40 Jahre sind.

- b) 1) Analyse der Umfrage zum Einsatz des Algorithmus:

Wir betrachten die folgenden Parameter:

$n = 200$: Anzahl der zufällig ausgewählten Abonnenten

$p = 0,6$: Derzeitiger Anteil zufriedener Abonnenten

$Y \geq 132$: Mindestanzahl zufriedener Abonnenten für Erfolg

Die Wahrscheinlichkeit für den Erfolg berechnet sich durch:

$$P_{0,6}^{200}(Y \geq 132) \approx 0,0475$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt somit ungefähr 4,75%.

- 2) i) Analyse bei erhöhtem Anteil zufriedener Abonnenten:

Wir betrachten folgende Parameter:

$n = 200$: Umfang der ausgewählten Abonnenten

$p = 0,65$: Gesteigerter Anteil zufriedener Abonnenten

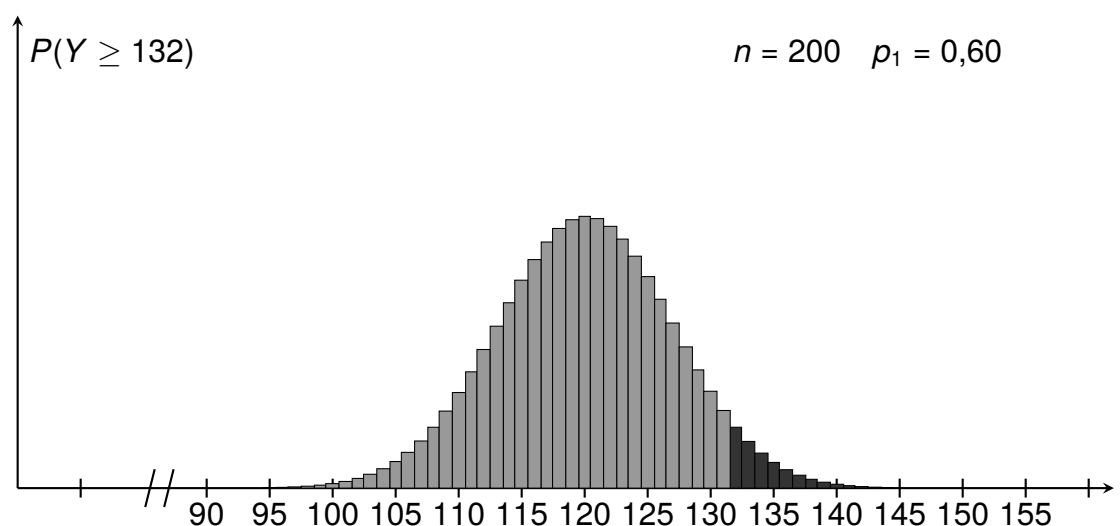
$Y < 132$: Kriterium für nicht-erfolgreiche Maßnahme

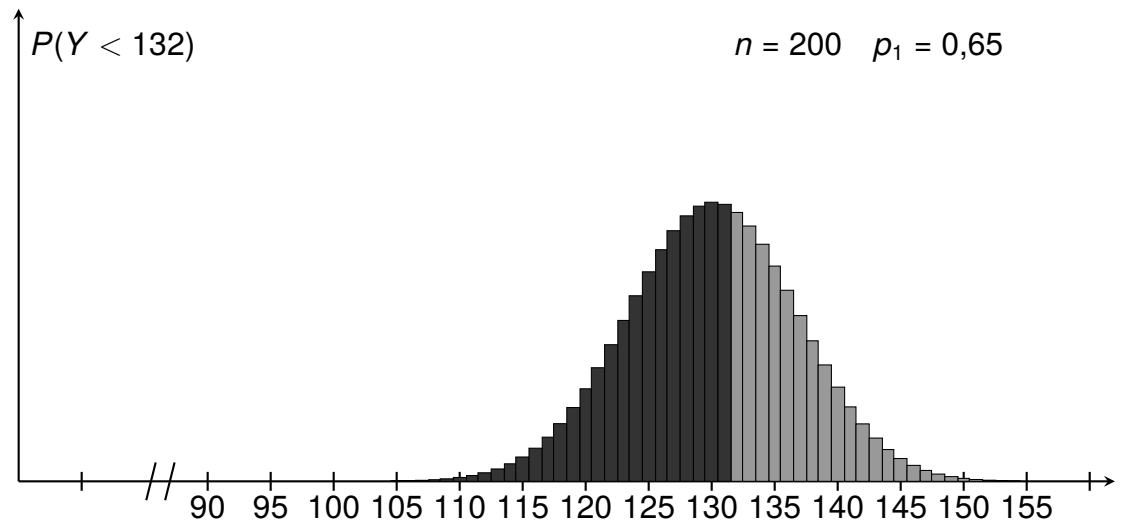
Die Wahrscheinlichkeit für eine scheinbar nicht-erfolgreiche Maßnahme beträgt:

$$\begin{aligned} P_{0,65}^{200}(Y < 132) &= P_{0,65}^{200}(Y \leq 131) \\ &\approx 0,5852 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das Management trotz tatsächlicher Verbesserung davon ausgeht, dass die Maßnahme nicht erfolgreich war, beträgt somit 58,52%.

- ii) Visualisierung der Verteilungen:





iii) Analyse der Fehlerarten:

Nimmt man $Y_2 < 125$ an, so erkennt man am unteren Histogramm, dass sich die Wahrscheinlichkeit für eine nicht-erfolgreiche Maßnahme verkleinert.

Dies kann auch durch geeignete Berechnungen gezeigt werden:

$$P_{0,6}^{200}(Y_1 \geq 125) \approx 0,2590$$

$$P_{0,65}^{200}(Y_2 < 125) = P_{0,65}^{200}(Y_2 \leq 124) \\ \approx 0,2067$$

Anhand des oberen Histogramms erkennt man, dass bei $Y_1 \geq 125$ der Anteil zufriedener Kunden scheinbar vergrößert ist. Man geht dann fälschlicherweise von einem höheren Anteil zufriedener Kunden aus, obwohl der tatsächliche Anteil weiterhin bei 60% liegt.