Gymnasium **NRW - LK**

Mathe Abitur Klausuren

Originale Prüfungsaufgaben

inkl. Lösungen von

Daniel Jung

Jahr: 2024

StudyHelp

Mathe Abi Klausurenheft – NRW (Leistungskurs)

Prüfungsjahr 2024

StudyHelp GmbH, Paderborn
WWW.STUDYHELP.DE

Autor: Christian Strack
Konzept & Lernvideos: Daniel Jung

Redaktion & Satz: Carlo Oberkönig
Kontakt: verlag@studyhelp.de
Umschlaggestaltung, Illustration: StudyHelp GmbH

E-Book

Inhalt

1 Abi Klausur 2024

1.1 Aufgaben

1.1.1 Prüfungsteil A

Für das Prüfungsjahr 2024 war der Prüfungsteil A wie folgt aufgebaut:

- **Pflichtaufgaben**:
  Es wurden 6 Aufgaben gestellt, die alle bearbeitet werden mussten.
- **Wahlpflichtaufgaben**:
  Es gab 6 Aufgaben zur Auswahl, von denen 2 bearbeitet werden mussten.

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **keine Hilfsmittel** verwendet werden.

- Arbeitszeit: max. 60 Minuten

Pflichtaufgaben

Die folgenden **sechs** Aufgaben müssen alle bearbeitet werden.

Aufgabe 1:
Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right) \cdot e^{2x+1}$, $x \in \mathbb{R}$.

a) Weisen Sie nach: $f'(x) = (x^2 - 4) \cdot e^{2x+1}$.

b) Untersuchen Sie die Funktion f auf lokale Extremstellen.

Aufgabe 2:
Gegeben ist die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen f_a mit $f_a(x) = ax^3 + ax^2$ und $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$.

a) Geben Sie den Wert von a an, sodass der Punkt $(1|6)$ auf dem Graphen von f_a liegt.

b) Berechnen Sie in Abhängigkeit von a den Inhalt der Fläche, die der Graph von f_a mit der x-Achse einschließt.

Aufgabe 3:

Gegeben ist die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $r, s \in \mathbb{R}$.

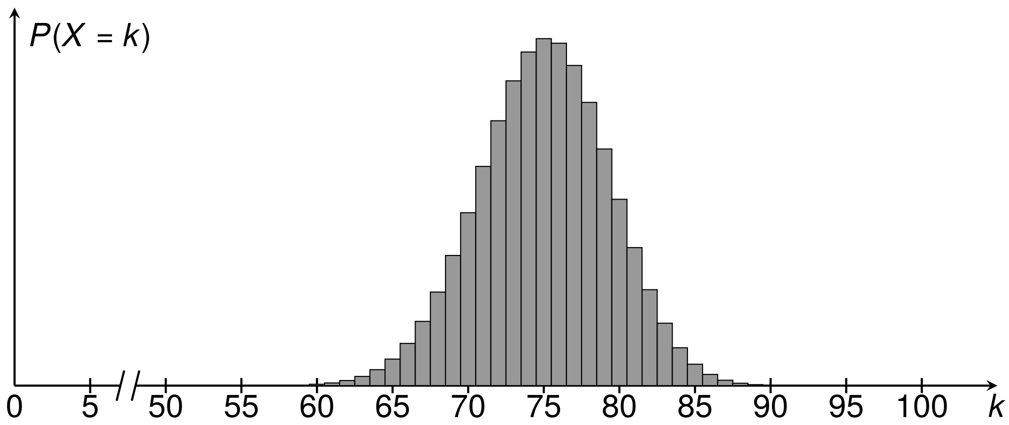
a) Ermitteln Sie eine Gleichung von E in Koordinatenform.
[Mögliche Lösung: $E : -3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 = -4$.]

b) Berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der Ebene E und der Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4:
Ein Glücksrad ist in 20 gleich große Sektoren unterteilt, die jeweils entweder blau oder gelb eingefärbt sind. Das Glücksrad wird 100-mal gedreht. Die binomialverteilte Zufallsgröße X beschreibt, wie oft dabei die Farbe „Blau“, die binomialverteilte Zufallsgröße Y, wie oft dabei die Farbe „Gelb“ erzielt wird.

a) Begründen Sie, dass X und Y die gleiche Standardabweichung haben.

b) Der Erwartungswert von X ist ganzzahlig. Die Abbildung zeigt Werte der Wahrscheinlichkeitsverteilung von X.
Bestimmen Sie die Anzahl der blauen Sektoren des Glücksrads.


P(X = k)
0
5
50
55
60
65
70
75
80
85
90
95
100
k

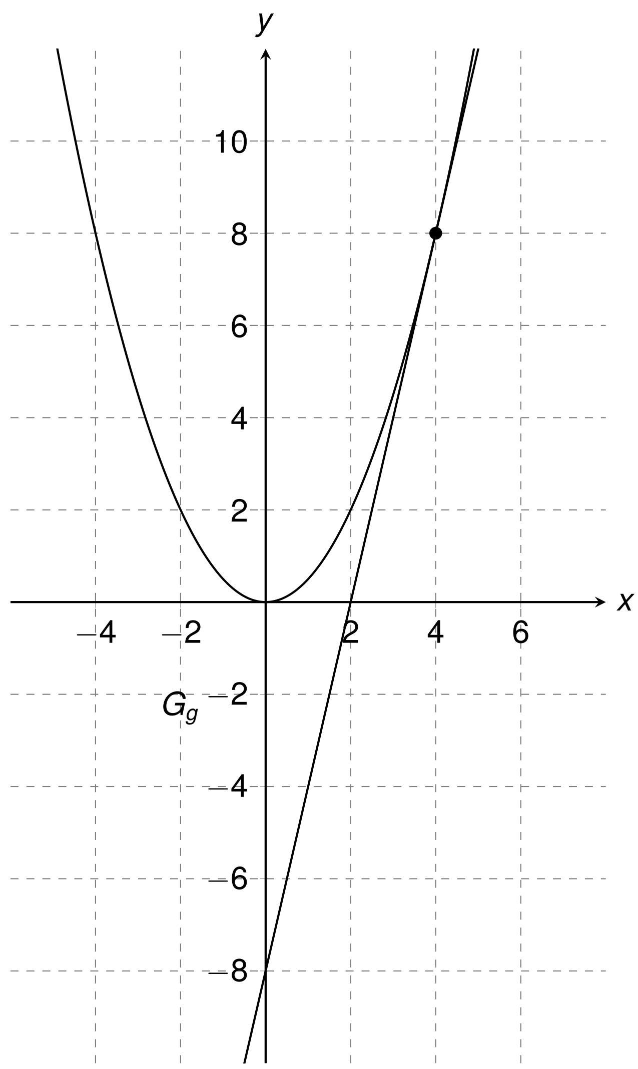
Wahlpflichtaufgaben

Von diesen sechs Wahlpflichtaufgaben müssen **zwei beliebige Aufgaben** bearbeitet werden.

Aufgabe 5:
Gegeben ist für jede positive reelle Zahl a die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g_a mit $g_a(x) = a \cdot x^2$.
Abbildung 1 zeigt den Graphen von $g_{\frac{1}{2}}$ sowie die Tangente t an den Graphen von $g_{\frac{1}{2}}$ im Punkt $(4|g_{\frac{1}{2}}(4))$.

a) Geben Sie anhand Abbildung 1 eine Gleichung der Tangente t an.

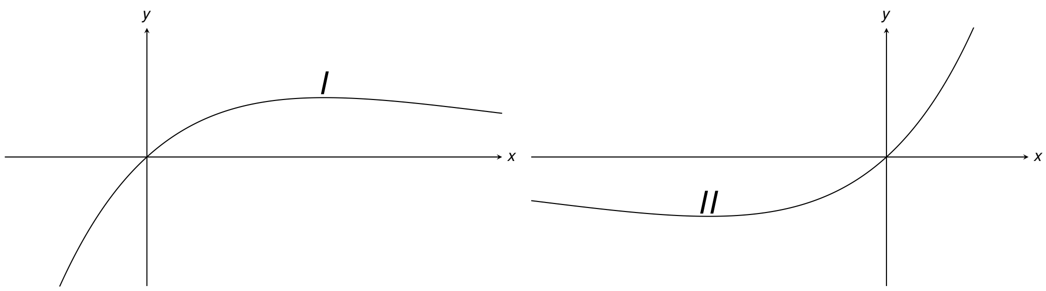
b) Weisen Sie nach, dass für jeden Wert $u \in \mathbb{R}$ die Tangente an den Graphen von g_a im Punkt $(u|g_a(u))$ die y-Achse im Punkt $(0| - g_a(u))$ schneidet.



Aufgabe 6:
Betrachtet wird die Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_a mit $h_a(x) = x \cdot e^{a \cdot x}$ und $a \in \mathbb{R}, a \neq 0$. Für jeden Wert von a besitzt die Funktion h_a genau eine Extremstelle.

a) Begründen Sie, dass der Graph von h_a für $x < 0$ unterhalb der x-Achse verläuft.

b) Die Abbildungen 2 und 3 zeigen jeweils einen Graphen der Schar. Einer der beiden Graphen gehört zu einem positiven Wert von a.
Entscheiden Sie, welcher Graph dies ist, und begründen Sie Ihre Entscheidung.



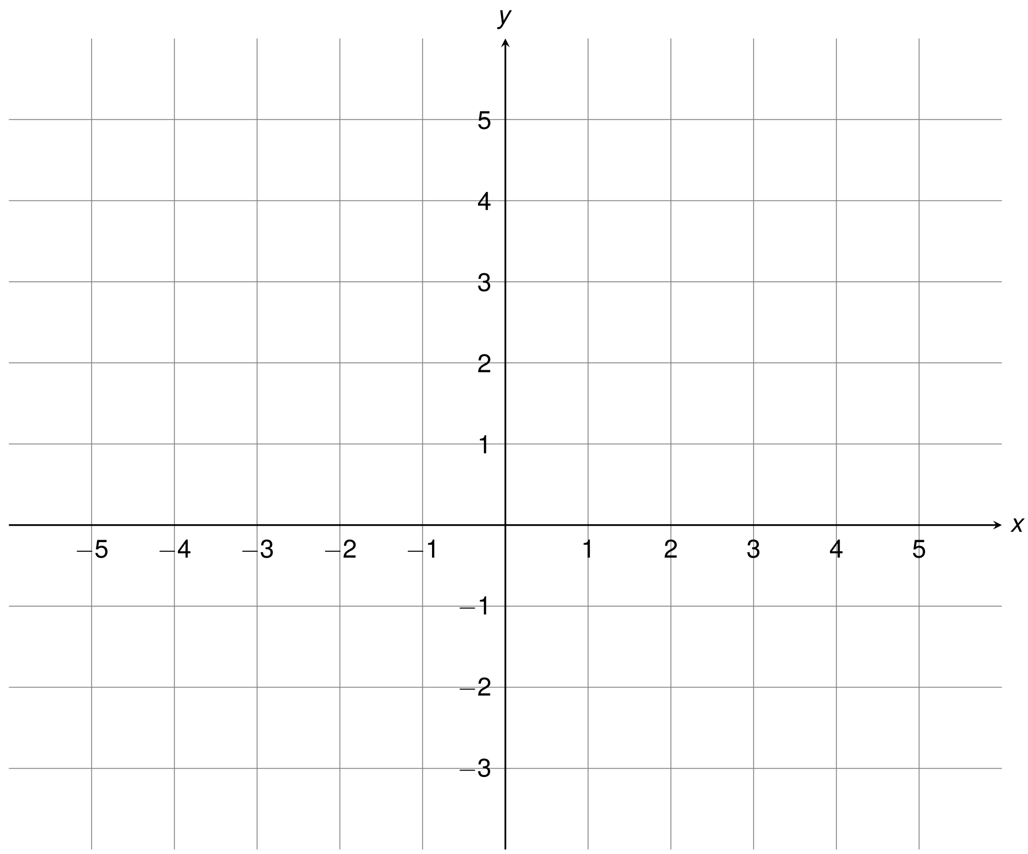
Aufgabe 7:
Gegeben ist die Schar der Ebenen E_a: $2ax_1 - 4x_2 + (a-2)x_3 = 12$ mit $a \in \mathbb{R}$.

a) Ermitteln Sie denjenigen Wert von a, für den E_a parallel zur Gerade mit der Gleichung $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b \in \mathbb{R}$ verläuft.

b) Prüfen Sie, ob die Ebene mit der Gleichung $6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$ zur Schar gehört.

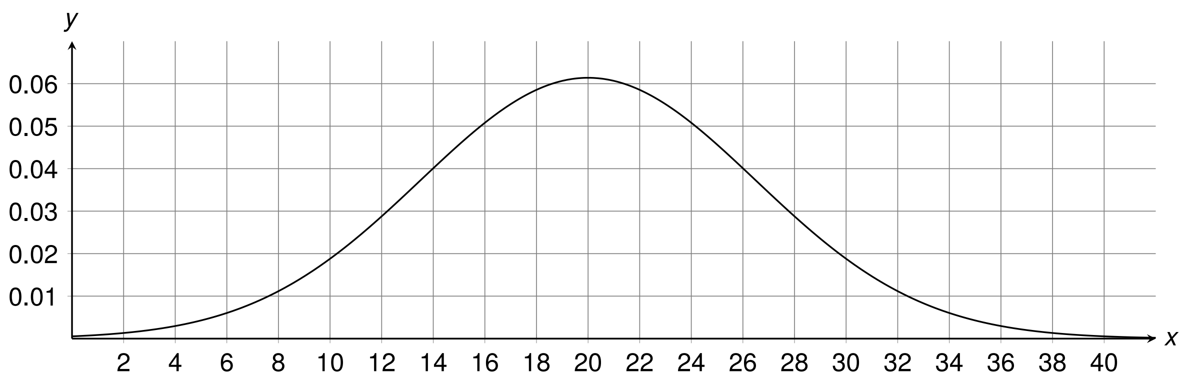
Aufgabe 8:
Die Punkte B(4|3|12) und C(2|4|10) sind Eckpunkte eines Parallelogramms ABCD, dessen Diagonalen sich im Punk M(3|2|1) schneiden.

a) Verschiebt man jeden der Punkte A, B, C, D und M parallel zur x_3-Achse in die x_1x_2-Ebene, so ergeben sich die Punkte A', B', C', D' bzw. M'. Das Viereck A'B'C'D' ist ein Parallelogramm, dessen Diagonalen sich im Punkt M' schneiden.
Zeichnen Sie A'B'C'D' und M' in Abbildung 4 ein.



b) Berechnen Sie den Wert des Skalarprodukts $\overrightarrow{CM} \circ \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und beurteilen Sie, ob der Winkel zwischen den Vektoren $\overrightarrow{CM}$ und $\overrightarrow{CB}$ kleiner ist als 90°.

Aufgabe 9:
Abbildung 5 zeigt den Graphen der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsgröße X mit dem Erwartungswert 20.



a) Geben Sie die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass X den Wert 14 annimmt.

b) Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis

E: „X nimmt einen Wert an, der um mehr als 2 von 20 abweicht".

Erläutern Sie die Überlegungen, die zur folgenden Bestimmung der gesuchten Wahrscheinlichkeit führen:

$P(18 \leq X \leq 20) \approx 2 \cdot 0{,}06 = 0{,}12$; Somit gilt: $P(E) \approx 1 - 2 \cdot 0{,}12 = 0{,}76$.

Aufgabe 10:
Ein Tetraeder, das mit den Augenzahlen 1, 2, 3 und 4 beschriftet ist, wird zum Würfeln verwendet. Das Tetraeder wurde so manipuliert, dass die Augenzahlen nicht alle mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftreten.

a) Die Augenzahl 4 tritt mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,1 auf.
Beschreiben Sie in diesem Kontext ein Ereignis, dessen Wahrscheinlichkeit mit dem folgenden Ausdruck berechnet werden kann:

$$0{,}9^{10} + \binom{10}{1} \cdot 0{,}1^1 \cdot 0{,}9^9 + \binom{10}{2} \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^8$$

.

b) Mit dem Tetraeder wird dreimal gewürfelt. Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsgröße X: „Anzahl der Einsen" ist in der folgenden Tabelle dargestellt:

k	0	1	2	3
P(X = k)	$\frac{27}{125}$	$\frac{54}{125}$	$\frac{36}{125}$	$\frac{8}{125}$

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsgröße X und die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl 1.

1.1.2 Prüfungsteil B

Bei der Bearbeitung der Aufgaben dürfen **Hilfsmittel** (GTR, Mathematische Formelsammlung, Wörterbuch zur deutschen Rechtschreibung) verwendet werden.

- Arbeitszeit: mind. 300 Minuten
  (je schneller du bei Prüfungsteil A fertig bist, desto mehr Zeit bleibt für diesen Prüfungsteil)

Analysis

Aufgabe 1:

a) Ein mit Wasser befülltes Glas wird aus einem Kühlschrank genommen. Die anschließende Entwicklung der Wassertemperatur infolge der höheren Raumtemperatur lässt sich mithilfe der in $\mathbb{R}$ definierten Funktion f: $t \mapsto 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$ modellhaft beschreiben. Dabei ist t die Zeit in Minuten, die seit der Entnahme aus dem Kühlschrank vergangen ist, und f(t) die Wassertemperatur in °C. Die Raumtemperatur beträgt konstant 25 °C.

(1) (i) Geben Sie die Wassertemperatur zum Zeitpunkt der Entnahme aus dem Kühlschrank an.

(ii) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wassertemperatur 12 °C beträgt.

(2) (i) Bestimmen Sie die mittlere Änderungsrate der Wassertemperatur innerhalb der ersten 30 Minuten.

(ii) Geben Sie f'(30) und die Bedeutung dieses Werts im Sachzusammenhang an.

(3) Ausgehend von einem beliebigen Zeitpunkt t* dauert es eine gewisse Zeit, bis die Wassertemperatur den Mittelwert zwischen der Temperatur zum Zeitpunkt t* und der Raumtemperatur angenommen hat. Zeigen Sie, dass diese Zeitdauer unabhängig von t* ist.

Bei einem anderen Vorgang wird die Entwicklung der Temperatur von Wasser in einem zweiten Glas durch die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion g: $t \mapsto 5 + 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$ modellhaft beschrieben. Dabei ist t die seit Beobachtungsbeginn vergangene Zeit in Minuten und g(t) die Wassertemperatur in °C. Bei den durch f und g beschriebenen Vorgängen sind die durch t = 0 festgelegten Zeitpunkte identisch.

(4) Beschreiben Sie, durch welche Transformationen der Graph von g aus dem Graphen von f hervorgeht.

(5) Beurteilen Sie jede der folgenden Aussagen:

I Die Temperatur des Wassers im zweiten Glas nimmt während des gesamten Beobachtungszeitraums ab.

II Für beide Gläser stimmen zu jedem Zeitpunkt die Beträge der momentanen Änderungsraten der Wassertemperaturen überein.

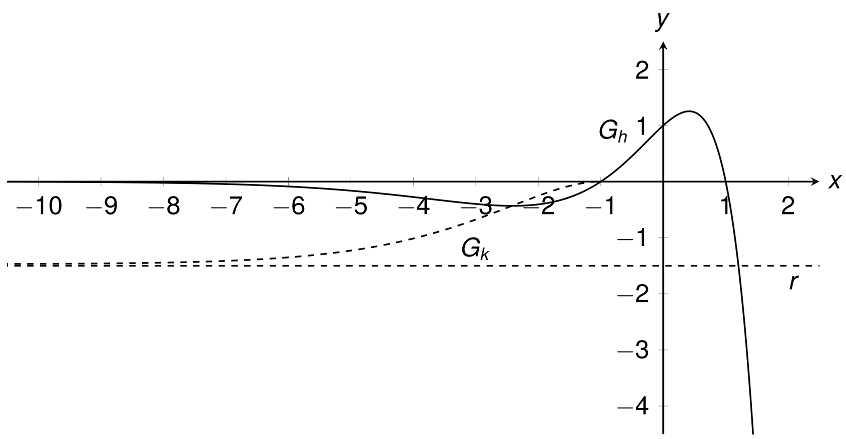
b) Gegeben ist die in $\mathbb{R}$ definierte Funktion h mit $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$. Der Graph von h wird mit G_h bezeichnet.

(1) Geben Sie den Grenzwert von h für $x \to -\infty$ an und begründen Sie Ihre Angabe anhand des Funktionsterms.

G_h schließt mit der x-Achse im ersten und zweiten Quadranten eine Fläche A ein.

(2) Die Gerade m verläuft parallel zur y-Achse durch den Hochpunkt $H(-1+\sqrt{2}|h(-1+\sqrt{2}))$ von G_h und teilt die Fläche A in zwei Teilflächen. Berechnen Sie den Anteil, den die größere der beiden Teilflächen an der Fläche A hat.

(3) Es gibt eine Zahl $b > 1$, sodass die Fläche, die G_h, die x-Achse und die Gerade mit der Gleichung $x = b$ im vierten Quadranten einschließen, den gleichen Inhalt hat wie die Fläche A. Bestimmen Sie b.



Gegeben ist die für $x \leq -1$ definierte Funktion k mit $k(x) = \int_x^{-1} h(t)\,dt$. Ihr Graph wird mit G_k bezeichnet. Die Abbildung zeigt G_h und G_k. Für $x \to -\infty$ kommt G_k der Geraden r mit der Gleichung $y = -\frac{4}{e}$ beliebig nahe.

(4) (i) Begründen Sie mithilfe des Funktionsterms, dass k die Nullstelle -1 besitzt und dass G_k im Bereich $x < -1$ unterhalb der x-Achse verläuft.

(ii) Deuten Sie damit unter Verwendung der Abbildung den Wert $-\frac{4}{e}$ in Bezug auf G_h geometrisch.

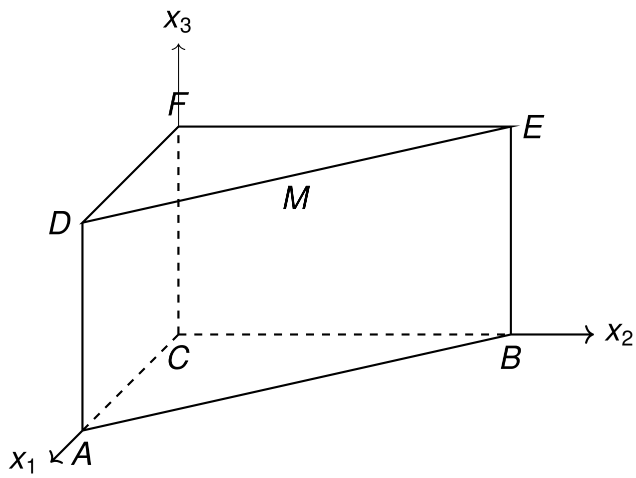
Die Funktion h gehört zur Schar der in $\mathbb{R}$ definierten Funktionen h_a mit $h_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (a - x^2) \cdot e^x$ und $a > 0$. Der Graph von h_a wird mit G_{h_a} bezeichnet.

(5) Begründen Sie anhand des Funktionsterms, dass für jedes $a > 0$ die Funktionswerte von h_a nur für $-\sqrt{a} < x < \sqrt{a}$ positiv sind.

(6) Es gibt einen Wert von a, sodass das Produkt der x-Koordinaten der beiden Extrempunkte von G_{h_a} gleich dem Produkt der y-Koordinaten dieser beiden Punkte ist. Berechnen Sie diesen Wert von a.

Geometrie

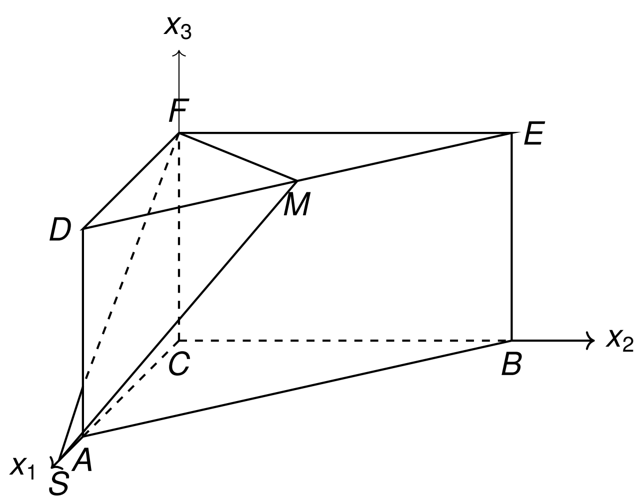
Aufgabe 1:
Gegeben sind das gerade Prisma ABCDEF mit den Eckpunkten C(0 | 0 | 0), D(6 | 0 | 5), E(0 | 8 | 5) und F(0 | 0 | 5) sowie der Punkt M(3 | 4 | 5) (vgl. Abbildung 1).



a) 1) Berechnen Sie die Größe des Innenwinkels des Dreiecks DEF bei D.

2) Berechnen Sie den Inhalt der Oberfläche des Prismas.

b) 1) Mit W_t wird die Ebene bezeichnet, die die Punkte M, F und $S_t(t|0|0)$ mit $t \geq 0$ enthält.
In Abbildung 2 ist dieser Sachverhalt für einen bestimmten Wert von t dargestellt.



Stellen Sie eine Gleichung der Ebene W_t in Parameterform auf.

2) Bestimmen Sie die Koordinaten eines Normalenvektors der Ebene W_t.

   [Zur Kontrolle: $\begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 4 \cdot t \end{pmatrix}$ ist ein Normalenvektor der Ebene W_t.]

3) Berechnen Sie die Größe des Winkels zwischen der Ebene W_5 und der x-y-Ebene.

4) Untersuchen Sie, ob es einen Wert von t gibt, für den die Strecke $\overline{BD}$ senkrecht zur Ebene W_t verläuft.

5) Die Gerade g_t verläuft durch den Punkt D und senkrecht zur Ebene W_t.
   Für $t > 0$ schneidet die Gerade g_t die x-y-Ebene im Punkt Q_t.
   Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes Q_t.
   [Zur Kontrolle: $Q_t\left(6 - \frac{25}{t} \,\middle|\, -\frac{75}{4 \cdot t} \,\middle|\, 0\right)$.]

6) Im Folgenden sind drei Schritte der Lösung einer Aufgabe angegeben, die im Zusammenhang mit den betrachteten geometrischen Objekten steht:

   i) $P(6 - 6 \cdot r|8 \cdot r|0)$ mit $0 \leq r \leq 1$.

   ii) $\left| \begin{array}{r} 6 - \frac{25}{t} = 6 - 6 \cdot r \\ -\frac{75}{4 \cdot t} = 8 \cdot r \end{array} \right|$.

   iii) Das Gleichungssystem (II) besitzt keine Lösung.

   Geben Sie eine passende Aufgabenstellung an und interpretieren Sie (iii) geometrisch.

Stochastik

Aufgabe 1:
Ein bekannter Video-Streamingdienst bietet einen kostenpflichtigen Zugang zu Spielfilmen und Serien an. Personen, die davon gegen Zahlung einer monatlichen Gebühr Gebrauch machen, werden im Folgenden als Abonnenten bezeichnet. Sie haben sich entweder für das Spielfilmpaket oder für das Komplettpaket entschieden, das neben den Spielfilmen auch noch Serien enthält.

a) Unter den Abonnenten sind 70 % höchstens 40 Jahre alt. Von diesen haben 80 % das Komplettpaket gewählt. Unter denjenigen Abonnenten, die älter sind als 40 Jahre, haben sich 50 % für das Komplettpaket entschieden.

   1) Stellen Sie den Sachverhalt in einem beschrifteten Baumdiagramm dar.
   2) Eine unter allen Abonnenten zufällig ausgewählte Person hat sich für das Komplettpaket entschieden.
      Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sie höchstens 40 Jahre alt ist.
   3) Bestimmen Sie die Anzahl der Abonnenten, die man mindestens zufällig auswählen müsste, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99 % mehr als 20 Personen älter sind als 40 Jahre.

b) Der Anteil der zufriedenen Abonnenten von derzeit 60 % soll gesteigert werden. Dazu wird ein Algorithmus entwickelt, der jedem Abonnenten täglich individuell einen Spielfilm vorschlägt. Als Basis für die Entscheidung über den dauerhaften Einsatz des Algorithmus plant das Management einen Probebetrieb.
   Im Anschluss soll die Nullhypothese „Der Anteil der zufriedenen Abonnenten beträgt höchstens 60 %.mithilfe einer Stichprobe von 200 zufällig ausgewählten Abonnenten auf einem Signifikanzniveau von 5 % getestet werden.

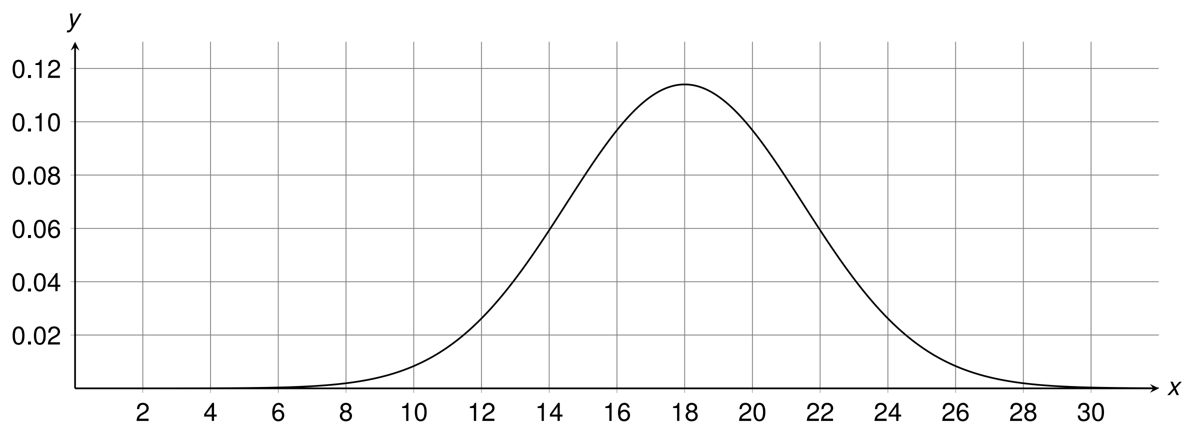
   1) Geben Sie an, welche Überlegung des Managements zur Wahl dieser Nullhypothese geführt haben könnte.
   2) Die Nullhypothese wird abgelehnt, wenn mindestens 132 Abonnenten mit dem Angebot zufrieden sind.
      Zur Bestimmung der unteren Grenze dieses Ablehnungsbereichs wurden zunächst folgende Lösungsschritte ausgeführt:
      - X: Anzahl der zufriedenen Abonnenten in der Stichprobe
      - $P_{200;0,6}(X \geq 132) \approx 0,047$

      Begründen Sie, dass die beiden Lösungsschritte zur Bestimmung der unteren Grenze nicht ausreichend sind, und ergänzen Sie diese geeignet.
   3) Weisen Sie nach, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler zweiter Art bei diesem Ablehnungsbereich der Nullhypothese mehr als 90 % betragen könnte.

c) Ein Internetnutzer hat verschiedene Möglichkeiten, Videos zu streamen. Im Folgenden wird die Zufallsgröße Y: „Wöchentliche Streamingdauer (in h)einer zufällig ausgewählten Person im Alter von mindestens 14 Jahren betrachtet. Die Zufallsgröße Y wird durch eine Normalverteilung mit den Kenngrößen $\mu_Y = 8,87$ und $\sigma_Y = 2,20$ modelliert.

1) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person im Alter von mindestens 14 Jahren in einer zufällig ausgewählten Woche mehr als 10 Stunden streamt.

Die Zufallsgröße Z: „Wöchentliche Streamingdauer (in h)einer zufällig ausgewählten Person im Alter von 14 bis 29 Jahren wird ebenfalls durch eine Normalverteilung modelliert.
Die Abbildung zeigt den Graphen der Dichtefunktion φ_Z der Zufallsgröße Z.



1) Ermitteln Sie mithilfe der Abbildung näherungsweise die Kenngrößen μ_Z und σ_Z der Normalverteilung für die Zufallsgröße Z.

1.2 Lösungen

1.2.1 Prüfungsteil A

zu Aufgabe 1:
Gegeben ist eine Funktion f mit dem Funktionsterm $f(x) = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right) \cdot e^{2x+1}$.

a) Für die Ableitung der Funktion f müssen wir die Produkt- und Kettenregel anwenden. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right)' \cdot e^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right) \cdot (e^{2x+1})' \\ &= (x - \frac{1}{2}) \cdot e^{2x+1} + \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{7}{4}\right) \cdot 2 \cdot e^{2x+1} \\ &= \left(x - \frac{1}{2} + x^2 - x - \frac{7}{2}\right) \cdot e^{2x+1} \\ &= (x^2 - 4) \cdot e^{2x+1} \end{aligned}$$

b) Um die Extremstellen der Funktion f zu bestimmen, nutzen wir die notwendige Bedingung für Extremstellen $f'(x) = 0$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 4) \cdot e^{2x+1} = 0$$

Da die Exponentialfunktion e^{2x+1} für alle reellen Werte von x stets positiv ist, erhalten wir:

$$x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 2$$

Somit haben wir die beiden möglichen Extremstellen $x_1 = -2$ und $x_2 = 2$ gefunden.

Für die hinreichende Bedingung untersuchen wir das Vorzeichen der ersten Ableitung $f'(x)$ in der Umgebung der Extremstellen:

$x < -2$	$-2 < x < 2$	$x > 2$
z.B. $x_0 = -3$	z.B. $x_0 = 0$	z.B. $x_0 = 3$
$f'(x_0) = 5 \cdot e^{-5} > 0$	$f'(x_0) = -4 \cdot e^1 < 0$	$f'(x_0) = 5 \cdot e^7 > 0$

Da an der Stelle $x = -2$ die erste Ableitung von positiven zu negativen Werten übergeht, liegt dort ein Hochpunkt vor. An der Stelle $x = 2$ wechselt die erste Ableitung von negativen zu positiven Werten, was einen Tiefpunkt kennzeichnet.

Alternativ können wir die hinreichende Bedingung für Extremstellen auch mithilfe der zweiten Ableitung überprüfen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2-4)' \cdot e^{2x+1} + (x^2-4) \cdot (e^{2x+1})' \\ &= 2x \cdot e^{2x+1} + (x^2-4) \cdot 2 \cdot e^{2x+1} \\ &= 2 \cdot (x + x^2 - 4) \cdot e^{2x+1} \\ &= 2 \cdot (x^2 + x - 4) \cdot e^{2x+1} \end{aligned}$$

Nun setzen wir die gefundenen Extremstellen ein:

$$f''(-2) = 2 \cdot (4-2-4) \cdot e^{-3} = 2 \cdot (-2) \cdot e^{-3} < 0$$

Da $f''(-2) < 0$ ist, liegt bei $x = -2$ ein Hochpunkt vor.

$$f''(2) = 2 \cdot (4+2-4) \cdot e^{5} = 2 \cdot 2 \cdot e^{5} > 0$$

Da $f''(2) > 0$ ist, liegt bei $x = 2$ ein Tiefpunkt vor.

zu Aufgabe 2:
Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = ax^3 + ax^2$ mit einem reellen Parameter a.

a) Bestimmung des Parameters a:

Der Graph der Funktion f_a verläuft durch den Punkt $(1|6)$. Wir setzen daher die gegebenen Werte in die Funktionsgleichung ein:

$$\begin{aligned} f_a(1) &= 6 \\ a \cdot 1^3 + a \cdot 1^2 &= 6 \\ a + a &= 6 \\ 2a &= 6 \\ a &= 3 \end{aligned}$$

Der gesuchte Parameter ist somit $a = 3$.

b) Berechnung des Flächeninhalts:

Zunächst bestimmen wir die Nullstellen der Funktion $f_a(x) = ax^3 + ax^2$:

$$\begin{aligned} f_a(x) &= 0 \\ ax^3 + ax^2 &= 0 \\ ax^2(x+1) &= 0 \end{aligned}$$

Da $a \neq 0$ folgt:

$$x^2 = 0 \lor x + 1 = 0 \Rightarrow x = 0 \lor x = -1$$

Die Nullstellen der Funktion f_a sind somit $x_1 = -1$ und $x_2 = 0$.

Für den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion und der x-Achse im Intervall $[-1; 0]$ berechnen wir das bestimmte Integral:

$$\begin{aligned}
A &= \int_{-1}^{0} (ax^3 + ax^2)\, dx \\
&= a \cdot \int_{-1}^{0} (x^3 + x^2)\, dx \\
&= a \cdot \left[\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} \\
&= a \cdot \left[(0 + 0) - \left(\frac{1}{4} + \frac{-1}{3}\right)\right] \\
&= a \cdot \left[(0) - \left(\frac{3}{12} - \frac{4}{12}\right)\right] \\
&= a \cdot \left[(0) - \left(\frac{-1}{12}\right)\right] \\
&= a \cdot \frac{1}{12} \\
&= \frac{a}{12}
\end{aligned}$$

Mit $a = 3$ erhalten wir den Flächeninhalt:

$$A = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

zu Aufgabe 3:

Gegeben ist eine Ebene E durch den Punkt $P(1|-2|3)$ mit den Spannvektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie eine Gerade $g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$.

a) Aufstellen der Ebenengleichung:

Um die Ebenengleichung in Koordinatenform aufzustellen, benötigen wir einen Normalenvektor der Ebene. Dieser steht senkrecht zu den beiden Spannvektoren. Wir suchen also einen Vektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, für den gilt:

$\vec{n} \perp \vec{a}$ und $\vec{n} \perp \vec{b}$

Das führt zu den Bedingungen:

$$\vec{n} \circ \vec{a} = 0$$
$$\vec{n} \circ \vec{b} = 0$$

Setzen wir die Koordinaten ein, erhalten wir:

$$\vec{n} \circ \vec{a} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \cdot n_1 + 2 \cdot n_2 + (-4) \cdot n_3 = 0$$
$$\Rightarrow 2n_2 - 4n_3 = 0 \Rightarrow n_2 = 2n_3$$

$$\vec{n} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot n_1 + 1 \cdot n_2 + 1 \cdot n_3 = 0$$
$$\Rightarrow n_1 + n_2 + n_3 = 0$$

Mit $n_2 = 2n_3$ folgt:

$$n_1 + 2n_3 + n_3 = 0$$
$$n_1 + 3n_3 = 0$$
$$n_1 = -3n_3$$

Wir können $n_3 = 1$ setzen und erhalten damit $n_2 = 2$ und $n_1 = -3$. Ein Normalenvektor der Ebene ist somit:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Mit dem Stützpunkt $P(1|-2|3)$ und dem Normalenvektor $\vec{n}$ können wir nun die Ebenengleichung in Punkt-Normalenform aufstellen:

$$\vec{n} \circ (\vec{x} - \vec{p}) = 0$$
$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0$$
$$-3 \cdot (x_1 - 1) + 2 \cdot (x_2 - (-2)) + 1 \cdot (x_3 - 3) = 0$$
$$-3x_1 + 3 + 2x_2 + 4 + x_3 - 3 = 0$$
$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4$$

Die Ebenengleichung in Koordinatenform lautet somit:

$$-3x_1 + 2x_2 + x_3 = -4$$

b) Schnitt der Ebene mit der Geraden:

Um den Schnittpunkt zwischen der Ebene E und der Geraden g zu bestimmen, setzen wir die Parameterdarstellung der Geraden in die Ebenengleichung ein:

$$g : \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das bedeutet:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1 + (-3)t = -1 - 3t \\ x_2 &= -2 + 2t \\ x_3 &= -3 + t \end{aligned}$$

Einsetzen in die Ebenengleichung:

$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 + x_3 &= -4 \\ -3 \cdot (-1 - 3t) + 2 \cdot (-2 + 2t) + 1 \cdot (-3 + t) &= -4 \\ 3 + 9t - 4 + 4t - 3 + t &= -4 \\ 3 + 9t - 4 + 4t - 3 + t + 4 &= 0 \\ 14t &= 0 \\ t &= 0 \end{aligned}$$

Mit $t = 0$ erhalten wir den Schnittpunkt:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Der Schnittpunkt der Ebene E mit der Geraden g ist der Punkt $S(-1|-2|-3)$.

zu Aufgabe 4:
Betrachtet wird ein Glücksrad mit 20 gleich großen Sektoren, die entweder blau oder gelb gefärbt sind. Bei 100-maligem Drehen des Glücksrads seien X und Y die Anzahlen der Ergebnisse "Blau"bzw. "Gelb".

a) Berechnung der Standardabweichung:

Die Zufallsgrößen X und Y sind binomialverteilt mit Parametern $n = 100$ und p für "Blau"bzw. $q = 1 - p$ für "Gelb". Für die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße gilt allgemein:

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Für die Standardabweichung von X erhalten wir:

$$\sigma_X = \sqrt{100 \cdot p \cdot (1-p)}$$

Und für die Standardabweichung von Y gilt:

$$\sigma_Y = \sqrt{100 \cdot (1-p) \cdot (1-(1-p))} = \sqrt{100 \cdot (1-p) \cdot p}$$

Wir sehen, dass $\sigma_X = \sigma_Y$, da in der Formel p und $(1-p)$ symmetrisch auftreten, sodass die Vertauschung von p und $(1-p)$ keinen Einfluss auf das Ergebnis hat.

b) Bestimmung der Anzahl blauer Sektoren:

Der Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße mit Parametern n und p beträgt $\mu = n \cdot p$. Aus der Abbildung können wir ablesen, dass der Erwartungswert der Zufallsgröße X den Wert $\mu_X = 75$ hat. Damit gilt:

$$\begin{aligned} \mu_X = n \cdot p &= 75 \\ 100 \cdot p &= 75 \\ p = \frac{75}{100} &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

Der Anteil der blauen Sektoren auf dem Glücksrad entspricht der Wahrscheinlichkeit $p = \frac{3}{4}$. Bei insgesamt 20 Sektoren ergibt sich für die Anzahl b der blauen Sektoren:

$$\begin{aligned} p = \frac{b}{20} &= \frac{3}{4} \\ b = 20 \cdot \frac{3}{4} &= 15 \end{aligned}$$

Auf dem Glücksrad sind 15 der 20 Sektoren blau gefärbt.

1.2.2 Wahlpflichtaufgaben

zu Aufgabe 5:

a) Bestimmung der Tangentengleichung:

Um die Gleichung der Tangente t zu bestimmen, berechnen wir zunächst die Steigung:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{8 - 0}{4 - 2} = \frac{8}{2} = 4$$

Zudem lässt sich der y-Achsenabschnitt ablesen: $S(0|-8)$.
Mit der Steigung $m = 4$ und dem Punkt $(0|-8)$ können wir die Punktsteigungsform der Geraden aufstellen:

$$\begin{aligned} y - y_0 &= m \cdot (x - x_0) \\ y - (-8) &= 4 \cdot (x - 0) \\ y + 8 &= 4x \\ y &= 4x - 8 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Tangente lautet somit $t : y = 4x - 8$.

b) Untersuchung der Berührungseigenschaften:

Gegeben ist die Funktion $g_a(x) = ax^2$. Wir berechnen die erste Ableitung:

$$g_a'(x) = 2ax$$

Sei u die Stelle, an der die Tangente den Graphen berührt. Die Steigung der Tangente an dieser Stelle ist gleich dem Wert der Ableitung:

$$g_a'(u) = 2au = 4$$

Der Berührpunkt hat die Koordinaten $(u|g_a(u)) = (u|au^2)$. Durch diesen Punkt verläuft die Tangente mit der Gleichung $y = 4x - 8$. Einsetzen des Berührpunkts in die Tangentengleichung:

$$au^2 = 4u - 8$$

Wir haben nun ein Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten:

$$\begin{aligned} 2au &= m \\ au^2 &= m \cdot u + n \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $a = \frac{2}{u}$. Einsetzen in die zweite Gleichung:

$$\begin{aligned} a \cdot u^2 &= 2au \cdot u + n \\ au^2 &= 2au^2 + n \\ n &= -au^2 \end{aligned}$$

Also folgt $u = -g_a(u)4$.

Somit schneidet die Tangente die y-Achse im Punkt $S(0|-g_a(u))$.

zu Aufgabe 6:
Gegeben sind verschiedene Funktionen $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ und $h_a(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{ax}$ sowie deren Graphen.

a) Analyse der Vorzeicheneigenschaften:

Bei der Funktion $f_a(x) = x \cdot e^{ax}$ müssen wir das Vorzeichen beider Faktoren betrachten. Die Exponentialfunktion e^{ax} ist für alle reellen Werte von x und a stets positiv. Das Vorzeichen von $f_a(x)$ wird daher allein durch den Faktor x bestimmt.

Für $x < 0$ gilt $f_a(x) < 0$, da $x < 0$ und $e^{ax} > 0$.

Für $x > 0$ gilt $f_a(x) > 0$, da $x > 0$ und $e^{ax} > 0$.

Für $x = 0$ gilt $f_a(0) = 0 \cdot e^{a \cdot 0} = 0$.

Diese Vorzeicheneigenschaften gelten unabhängig vom Parameter a.

b) Zuordnung der Graphen:

Um zu entscheiden, welcher Graph zu einem positiven bzw. negativen Wert von a gehört, untersuchen wir das Verhalten der Funktion $h_a(x) = \frac{1}{2} \cdot e^{ax}$ für $x \to \infty$.

Für $a > 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} h_a(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{ax} = \infty$$

Für $a < 0$ gilt:

$$\lim_{x\to\infty} h_a(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{2} \cdot e^{ax} = 0$$

Bei positiven Werten von a wachsen die Funktionswerte für $x \to \infty$ also unbegrenzt, während sie bei negativen Werten von a gegen null streben.

Der Graph in Abbildung 2 zeigt, dass die Funktionswerte für große Werte von x immer kleiner werden und sich der x-Achse annähern. Dies entspricht dem Verhalten für $a < 0$.

Der Graph in Abbildung 3 hingegen zeigt, dass die Funktionswerte für große Werte von x unbegrenzt wachsen. Dies entspricht dem Verhalten für $a > 0$.

Somit gehört der Graph aus Abbildung 3 zu einem positiven Wert von a.

zu Aufgabe 7:
Gegeben ist die Ebenenschar $E_a : 2ax_1 - 4x_2 + (a-2)x_3 = 12$ mit dem Parameter $a \in \mathbb{R}$ sowie die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmung des Parameters für Parallelität:

Die Gerade g verläuft parallel zur Ebene E_a, wenn der Richtungsvektor der Geraden senkrecht zum Normalenvektor der Ebene steht. Der Normalenvektor der Ebene E_a ist:

$\vec{n}_a = \begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix}$

Die Bedingung für Parallelität lautet:

$$\begin{aligned} \vec{n}_a \circ \vec{v} &= 0 \\ \begin{pmatrix} 2a \\ -4 \\ a-2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 0 \\ 2a \cdot (-1) + (-4) \cdot 0 + (a-2) \cdot 1 &= 0 \\ -2a + a - 2 &= 0 \\ -a - 2 &= 0 \\ -a &= 2 \\ a &= -2 \end{aligned}$$

Die Gerade g verläuft also genau dann parallel zur Ebene E_a, wenn $a = -2$ gilt.

b) Prüfung der Zugehörigkeit einer Ebene zur Schar:

Es soll geprüft werden, ob die Ebene $E : 6x_1 - 8x_2 + x_3 = 24$ zur Schar $E_a : 2ax_1 - 4x_2 + (a-2)x_3 = 12$ gehört. Dies ist genau dann der Fall, wenn es einen Wert $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass die beiden Ebenengleichungen übereinstimmen.

Zunächst beobachten wir, dass die rechte Seite der Gleichung von E doppelt so groß ist wie die von E_a. Wir multiplizieren daher die Gleichung von E_a mit 2:

$$2 \cdot (2ax_1 - 4x_2 + (a-2)x_3 = 12) \Leftrightarrow 4ax_1 - 8x_2 + 2(a-2)x_3 = 24$$

Nun können wir die Koeffizienten der beiden Ebenen vergleichen:

$$\begin{aligned}
4a &= 6 &\Rightarrow\quad a &= \tfrac{3}{2}\\
-8 &= -8 &\Rightarrow\quad &\text{erfüllt}\\
2(a-2) &= 1 &\Rightarrow\quad 2\left(\tfrac{3}{2}-2\right) &= 1\\
2\cdot\left(-\tfrac{1}{2}\right) &= 1 &\Rightarrow\quad -1 &= 1
\end{aligned}$$

Wir erhalten einen Widerspruch, da $-1 \neq 1$. Somit existiert kein Wert $a \in \mathbb{R}$, für den die Ebene E zur Schar E_a gehört. Die Ebene E ist keine Ebene der Schar.

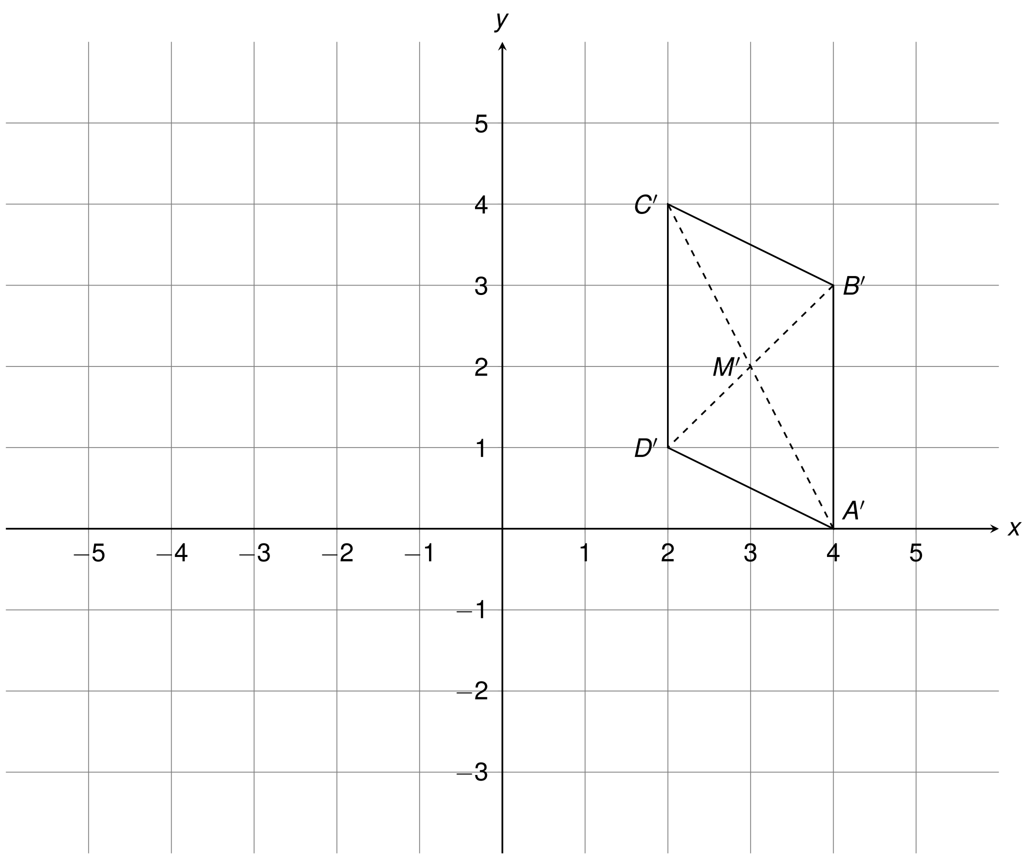
zu Aufgabe 8:
Gegeben sind die Punkte $B(4|3|12)$, $C(2|4|10)$ und der Mittelpunkt $M(3|2|1)$ einer Diagonale eines Parallelogramms.

a) Konstruktion und Koordinatenbestimmung:

Projezieren wir die Punkte in die x_1x_2-Ebene, so wird jeder $x_3 = 0$.

$B'(4|3|0)$, $C'(2|4|0)$ und $M'(3|2|0)$.

Zeichnen wir diese ein, ergeben sich direkt die anderen Punkte:



b) Bestimmung des Winkels zwischen zwei Vektoren:

Für die Vektoren $\overrightarrow{CM} = M - C$ und $\overrightarrow{CB} = B - C$ berechnen wir zunächst:

$$\overrightarrow{CM} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Der Kosinus des Winkels α zwischen diesen Vektoren berechnet sich über das Skalarprodukt:

$$\begin{aligned}
\cos(\alpha) &= \frac{\overrightarrow{CM} \circ \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CM}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \\
&= \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -6 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -9 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-6)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-9)^2}} \\
&= \frac{-14}{|\overrightarrow{CM}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} \\
&< 0
\end{aligned}$$

Da $\cos(\alpha) < 0$, ist der Winkel α größer als 90ř.

zu Aufgabe 9:

Betrachtet wird eine stetige Zufallsgröße X mit der Dichtefunktion f.

a) Wahrscheinlichkeitsberechnung für einen Einzelwert:

Bei einer stetigen Zufallsgröße berechnet sich die Wahrscheinlichkeit für einen Bereich $[r; s]$ durch das Integral:

$$P(r \leq X \leq s) = \int_r^s f(x)\, dx$$

Für einen einzelnen Wert $X = 14$ (also $r = s = 14$) gilt:

$$P(X = 14) = \int_{14}^{14} f(x)\,dx = 0$$

Bei einer stetigen Zufallsgröße ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie einen bestimmten Einzelwert annimmt, stets null.

b) Wahrscheinlichkeitsberechnung für eine Abweichung:

Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis E: "X nimmt einen Wert an, der um mehr als 2 von 20 abweicht". Mathematisch ausgedrückt:

$$P(E) = P(X < 18 \vee X > 22) = 1 - P(18 \leq X \leq 22)$$

Aufgrund der symmetrischen Form der Dichtefunktion um $x = 20$ gilt:

$$P(18 \leq X \leq 22) = 2 \cdot P(18 \leq X \leq 20)$$

Die Wahrscheinlichkeit $P(18 \leq X \leq 20)$ können wir aus dem Graphen der Dichtefunktion ablesen. Die Fläche unter der Dichtefunktion im Intervall $[18; 20]$ entspricht näherungsweise einem Rechteck mit der Breite 2 und der Höhe 0,06. Somit:

$$P(18 \leq X \leq 20) \approx 2 \cdot 0,06 = 0,12$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} P(18 \leq X \leq 22) &= 2 \cdot 0,12 = 0,24 \\ P(E) &= 1 - 0,24 = 0,76 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass X um mehr als 2 von 20 abweicht, beträgt somit etwa 76

zu Aufgabe 10:
Betrachtet wird ein Tetraederwürfel (ein Würfel mit vier Seitenflächen).

a) Interpretation eines Wahrscheinlichkeitsausdrucks:

Der Term $\sum_{k=0}^{2} \binom{10}{k} \cdot 0,1^k \cdot 0,9^{10-k}$ beschreibt eine Wahrscheinlichkeit in einer binomialverteilten Situation mit folgenden Parametern:

- Anzahl der Versuche: $n = 10$ (10 Würfe)

- Wahrscheinlichkeit für Erfolg: $p = 0,1$ (Wahrscheinlichkeit, die Augenzahl 4 zu würfeln)
- Anzahl der Erfolge: $k = 0, 1, 2$ (höchstens zweimal die Augenzahl 4)

Die Zufallsgröße X gibt an, wie häufig die Augenzahl 4 bei 10 Würfen aufgetreten ist. Der Term berechnet $P(X \leq 2)$, also die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei zehn Würfen des Tetraeders höchstens zweimal die Augenzahl 4 erscheint.

b) Bestimmung der Wahrscheinlichkeit p:

Die Tabelle gibt die Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X an, die angibt, wie oft ein bestimmtes Ereignis bei drei Versuchen eintritt. Es handelt sich um eine binomialverteilte Zufallsgröße mit Parametern $n = 3$ und gesuchtem p.

Aus der Tabelle können wir den Erwartungswert der Zufallsgröße X berechnen:

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_{k=0}^{3} k \cdot P(X = k) \\ &= 0 \cdot \frac{27}{125} + 1 \cdot \frac{54}{125} + 2 \cdot \frac{36}{125} + 3 \cdot \frac{8}{125} \\ &= \frac{54 + 72 + 24}{125} \\ &= \frac{150}{125} \\ &= \frac{6}{5} \end{aligned}$$

Andererseits wissen wir, dass für den Erwartungswert einer binomialverteilten Zufallsgröße gilt:

$$E(X) = n \cdot p$$

Also:

$$\begin{aligned} \frac{6}{5} &= 3 \cdot p \\ p &= \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit p beträgt somit $\frac{2}{5}$ oder 0,4.

1.2.3 Prüfungsteil B

Analysis

zu Aufgabe 1:

a) Gegeben ist eine Funktion $f(t) = 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$, welche die Temperatur einer Flüssigkeit in einem Glas nach der Entnahme aus einem Kühlschrank in Abhängigkeit von der Zeit t in Minuten modelliert.

1) i) Der Zeitpunkt, an dem das Glas aus dem Kühlschrank genommen wird, entspricht dem Zeitpunkt $t = 0$. Die Temperatur der Flüssigkeit zu diesem Zeitpunkt lässt sich durch Einsetzen berechnen:

$$\begin{aligned} f(0) &= 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot 0} \\ &= 25 - 20 \cdot e^{0} \\ &= 25 - 20 \cdot 1 \\ &= 25 - 20 \\ &= 5 \end{aligned}$$

Die Temperatur der Flüssigkeit bei Entnahme aus dem Kühlschrank beträgt somit 5 °C.

ii) Um den Zeitpunkt zu bestimmen, zu dem die Wassertemperatur 12 °C beträgt, setzen wir $f(t) = 12$ und lösen nach t auf:

$$\begin{aligned} f(t) &= 12 \\ 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} &= 12 \\ -20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} &= 12 - 25 \\ -20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} &= -13 \\ e^{-0{,}014 \cdot t} &= \frac{13}{20} \\ -0{,}014 \cdot t &= \ln\left(\frac{13}{20}\right) \\ t &= \frac{\ln\left(\frac{13}{20}\right)}{-0{,}014} \approx 30{,}77 \end{aligned}$$

Etwa 31 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank hat das Wasser eine Temperatur von 12 °C.

2) i) Die mittlere Änderungsrate einer Funktion f im Intervall $[a; b]$ entspricht der Steigung einer Geraden durch die Punkte $P_1(a|f(a))$ und $P_2(b|f(b))$. Diese berechnet sich nach der folgenden Formel:

$$m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Für das Intervall $[0; 30]$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(30) - f(0)}{30 - 0} \\ &= \frac{f(30) - 5}{30} \\ &\approx \frac{11{,}86 - 5}{30} \\ &\approx \frac{6{,}86}{30} \\ &\approx 0{,}229 \end{aligned}$$

In den ersten 30 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank nimmt die Wassertemperatur durchschnittlich um etwa 0,23 $\left[\frac{°\text{C}}{\text{min}}\right]$ zu.

ii) Die Momentanrate (d.h. die Steigung des Graphen der Funktion f im Punkt $P(a|f(a))$) wird durch die Ableitung $f'(a)$ angegeben. Wir berechnen zunächst die erste Ableitung der Funktion f:

$$\begin{aligned} f'(t) &= \left(25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}\right)' \\ &= 0 - 20 \cdot \left(e^{-0{,}014 \cdot t}\right)' \\ &= -20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \cdot (-0{,}014) \\ &= 20 \cdot 0{,}014 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \\ &= 0{,}28 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \end{aligned}$$

Für $t = 30$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} f'(30) &= 0{,}28 \cdot e^{-0{,}014 \cdot 30} \\ &= 0{,}28 \cdot e^{-0{,}42} \\ &\approx 0{,}28 \cdot 0{,}657 \\ &\approx 0{,}18 \end{aligned}$$

30 Minuten nach der Entnahme aus dem Kühlschrank erhöht sich die Wassertemperatur mit einer momentanen Änderungsrate von etwa 0,18 $\left[\frac{°\text{C}}{\text{min}}\right]$.

3) In dieser Aufgabe wird untersucht, wie lange es dauert, bis die Temperatur den Mittelwert zwischen einer beliebig gewählten Temperatur $f(t^*)$ und der Raumtemperatur von 25 °C erreicht.

Der Mittelwert m zweier Werte a und b berechnet sich nach folgender Formel:

$$m = \frac{a + b}{2}$$

Mit der Raumtemperatur von 25 °C und der Temperatur $f(t^*)$ zum beliebigen Zeitpunkt t^* ergibt sich der Mittelwert:

$$m = \frac{25 + f(t^*)}{2}$$

Dieser Mittelwert wird erst nach einer gewissen Zeit t erreicht, und zwar zum Zeitpunkt $t_M = t^* + t$. Dies führt zur Gleichung:

$$f(t^* + t) = \frac{25 + f(t^*)}{2}$$

Mit dem Funktionsterm $f(t) = 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$ erhalten wir:

$$\begin{aligned}
25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot (t^* + t)} &= \frac{25 + 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t^*}}{2} \\
25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t^*} \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} &= \frac{50 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t^*}}{2} \\
25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t^*} \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} &= 25 - 10 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t^*} \\
-20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t^*} \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} &= -10 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t^*} \\
-20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} &= -10 \\
e^{-0{,}014 \cdot t} &= \frac{1}{2} \\
-0{,}014 \cdot t &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln(2) \\
t &= \frac{\ln(2)}{0{,}014} = \frac{500 \cdot \ln(2)}{7}
\end{aligned}$$

Die Zeit t, die vergeht, bis die Temperatur den Mittelwert erreicht, ist also $t = \frac{500 \cdot \ln(2)}{7}$ und tatsächlich unabhängig vom gewählten Zeitpunkt t^*.

4) Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen den Funktionen $f(t) = 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$ und $g(t) = 5 + 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$.

Wir untersuchen, wie der Graph von g aus dem Graphen von f entsteht:

Beginnen wir mit der Funktion $f(t) = 25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}$.

Wenn wir das Vorzeichen ändern, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-f(t) &= -(25 - 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}) \\
&= -25 + 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t}
\end{aligned}$$

Dies entspricht einer Spiegelung des Graphen von f an der t-Achse.

Verschieben wir nun diesen gespiegelten Graphen um 30 Einheiten nach oben, erhalten wir:

$$\begin{aligned}
-f(t) + 30 &= -25 + 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} + 30 \\
&= -25 + 30 + 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \\
&= 5 + 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \\
&= g(t)
\end{aligned}$$

Somit ist $g(t) = -f(t) + 30$, was bedeutet, dass der Graph von g entsteht, indem man den Graphen von f an der t-Achse spiegelt und anschließend um 30 Einheiten nach oben verschiebt.

5) Untersuchen wir, ob die gegebenen Aussagen I und II wahr sind.
Aussage I: Der Graph der Funktion g ist streng monoton fallend.
Die erste Ableitung von g ist:

$$\begin{aligned}
g'(t) &= (5 + 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t})' \\
&= 0 + 20 \cdot (e^{-0{,}014 \cdot t})' \\
&= 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \cdot (-0{,}014 \cdot t)' \\
&= 20 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \cdot (-0{,}014) \\
&= -0{,}28 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} \\
&= -\frac{7}{25} \cdot e^{-\frac{7}{500} \cdot t}
\end{aligned}$$

Da $e^{-\frac{7}{500} \cdot t} > 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ und der Vorfaktor $-\frac{7}{25}$ negativ ist, gilt $g'(t) < 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Somit ist der Graph von g streng monoton fallend, und Aussage I ist richtig.
Aussage II: Die Beträge der momentanen Änderungsraten von f und g stimmen für jeden Zeitpunkt t überein.
Wir haben bereits berechnet:

$$f'(t) = 0{,}28 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} = \frac{7}{25} \cdot e^{-\frac{7}{500} \cdot t}$$
$$g'(t) = -0{,}28 \cdot e^{-0{,}014 \cdot t} = -\frac{7}{25} \cdot e^{-\frac{7}{500} \cdot t}$$

Damit gilt:

$$|f'(t)| = \left|\frac{7}{25} \cdot e^{-\frac{7}{500} \cdot t}\right| = \frac{7}{25} \cdot e^{-\frac{7}{500} \cdot t}$$
$$|g'(t)| = \left|-\frac{7}{25} \cdot e^{-\frac{7}{500} \cdot t}\right| = \frac{7}{25} \cdot e^{-\frac{7}{500} \cdot t}$$

Da $|f'(t)| = |g'(t)|$ für alle $t \in \mathbb{R}$, stimmen die Beträge der momentanen Änderungsraten von f und g für jeden Zeitpunkt t überein. Somit ist auch Aussage II richtig.

b) Gegeben ist die Funktion $h(x) = (1 - x^2) \cdot e^x$ und eine Funktion $h_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (a - x^2) \cdot e^x$ mit einem Parameter $a > 0$.

1) Grenzwertberechnung:
Wir sollen den Grenzwert $\lim_{x \to -\infty}(1 - x^2) \cdot e^x$ bestimmen.
Für $x \to -\infty$ strebt $1 - x^2$ gegen $-\infty$, während e^x gegen 0 strebt. Dabei ist entscheidend, dass e^x für $x \to -\infty$ schneller gegen null strebt als $1 - x^2$ gegen $-\infty$ wächst.
Da der Faktor e^x für $x \to -\infty$ schneller gegen null läuft als der Faktor $1 - x^2$ gegen $-\infty$ wächst, gilt:

$$\lim_{x \to -\infty}(1 - x^2) \cdot e^x = 0$$

2) Bestimmung und Vergleich von Flächeninhalten:
Zunächst bestimmen wir die Nullstellen der Funktion $h(x) = (1-x^2)\cdot e^x$:

$$\begin{aligned} h(x) &= 0 \\ (1-x^2)\cdot e^x &= 0 \end{aligned}$$

Da $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, muss der erste Faktor null sein:

$$\begin{aligned} 1-x^2 &= 0 \\ x^2 &= 1 \\ x &= -1 \lor x = 1 \end{aligned}$$

Die Nullstellen der Funktion h sind somit $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$.
Die Gesamtfläche zwischen dem Graphen von h und der x-Achse im Intervall $[-1; 1]$ beträgt:

$$A = \int_{-1}^{1} h(x)\,dx$$

Um die Teilflächen zu vergleichen, unterteilen wir das Intervall am Punkt $x = -1 + \sqrt{2} \approx 0{,}414$:

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} h(x)\,dx \approx 0{,}952 \text{ [FE]} \\ A_2 &= \int_{-1+\sqrt{2}}^{1} h(x)\,dx \approx 0{,}519 \text{ [FE]} \end{aligned}$$

Die linke Teilfläche A_1 ist größer als die rechte Teilfläche A_2.
Der Anteil der größeren Teilfläche an der Gesamtfläche beträgt:

$$\begin{aligned} \frac{A_1}{A_1 + A_2} &= \frac{\int_{-1}^{-1+\sqrt{2}} h(x)\,dx}{\int_{-1}^{1} h(x)\,dx} \\ &\approx \frac{0{,}952}{0{,}952 + 0{,}519} \\ &\approx \frac{0{,}952}{1{,}471} \\ &\approx 0{,}647 \end{aligned}$$

Der Anteil des größeren Flächeninhalts am Flächeninhalt A beträgt also etwa 64,7%.

3) Bestimmung eines Grenzwertes b:
Wir sollen einen Wert $b > 1$ bestimmen, sodass die Fläche zwischen dem Graphen von h und der x-Achse im Intervall $[1; b]$ genauso groß ist wie die Fläche im Intervall $[-1; 1]$.

Da die Fläche im Intervall $[1; b]$ im vierten Quadranten liegt (also unterhalb der x-Achse), ist ihr Flächeninhalt gleich dem negativen Wert des entsprechenden Integrals. Es muss also gelten:

$$-\int_1^b h(x)\,dx = \int_{-1}^1 h(x)\,dx$$

Diese Gleichung kann nur numerisch gelöst werden und ergibt $b \approx 1{,}56$.

4) Diskussion der Eigenschaften von $k(x) = \int_x^{-1} h(t)\,dt$:

   i) Zunächst betrachten wir die Nullstelle von $k(x)$:
   $k(x) = \int_x^{-1} h(t)\,dt = 0$ bedeutet, dass das Integral über h im Intervall $[x; -1]$ den Wert null hat. Dies ist offensichtlich der Fall für $x = -1$, da dann das Integrationsintervall die Länge null hat.
   $k(-1) = \int_{-1}^{-1} h(t)\,dt = 0$
   Für $x < -1$ verläuft der Graph der Funktion h im dritten Quadranten (also unterhalb der x-Achse). Da das Integral $\int_x^{-1} h(t)\,dt$ in diesem Fall einer negativen Fläche entspricht, ist $k(x) < 0$ für $x < -1$.

   ii) Für $z \to -\infty$ untersuchen wir den Grenzwert $\lim_{z\to-\infty} k(z) = \lim_{z\to-\infty} \int_z^{-1} h(t)\,dt$.
   Da der Graph von h für $t < -1$ unterhalb der x-Achse verläuft und $h(t) \to 0$ für $t \to -\infty$, nähert sich die Fläche zwischen dem Graphen und der x-Achse im Intervall $[z; -1]$ für $z \to -\infty$ einem endlichen Wert an.
   Dieser Grenzwert lässt sich als $\lim_{z\to-\infty} k(z) = -\frac{4}{e}$ bestimmen. Da das Integral eine negative Fläche repräsentiert, beträgt der tatsächliche Flächeninhalt $\frac{4}{e}$ [FE].

5) Bestimmung des Definitionsbereichs von h_a:

   Wir betrachten die Funktion $h_a(x) = \frac{1}{a} \cdot (a - x^2) \cdot e^x$ mit $a > 0$.

   Da $a > 0$ und $e^x > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $h_a(x)$ genau dann positiv, wenn der Faktor $(a - x^2)$ positiv ist:

$$\begin{aligned} a - x^2 &> 0 \\ x^2 &< a \\ -\sqrt{a} < x &< \sqrt{a} \end{aligned}$$

   Die Funktionswerte von h_a sind also genau im offenen Intervall $(-\sqrt{a}; \sqrt{a})$ positiv.

6) Bestimmung des Parameters a:

   Wir sollen den Parameter a so bestimmen, dass für die beiden Extremstellen x_1 und x_2 der Funktion h_a gilt: $x_1 \cdot x_2 = h_a(x_1) \cdot h_a(x_2)$.

   Die notwendige Bedingung für Extremstellen lautet $h_a'(x) = 0$. Durch

Ableiten und Nullsetzen erhalten wir:

$$\begin{aligned}
h_a'(x) &= \left(\frac{1}{a}\cdot(a-x^2)\cdot e^x\right)' \\
&= \frac{1}{a}\cdot((a-x^2)\cdot e^x)' \\
&= \frac{1}{a}\cdot\left((-2x)\cdot e^x + (a-x^2)\cdot e^x\right) \\
&= \frac{1}{a}\cdot e^x\cdot\left(-2x+a-x^2\right) \\
&= \frac{1}{a}\cdot e^x\cdot\left(a-x^2-2x\right)
\end{aligned}$$

Für Extremstellen muss gelten:

$$\begin{aligned}
h_a'(x) &= 0 \\
\frac{1}{a}\cdot e^x\cdot\left(a-x^2-2x\right) &= 0
\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{a}\neq 0$ und $e^x\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$, folgt:

$$\begin{aligned}
a-x^2-2x &= 0 \\
x^2+2x-a &= 0
\end{aligned}$$

Mit der Mitternachtsformel erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= \frac{-2\pm\sqrt{4+4a}}{2} \\
&= -1\pm\sqrt{1+a}
\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}
x_1 &= -1+\sqrt{1+a} \\
x_2 &= -1-\sqrt{1+a}
\end{aligned}$$

Nun berechnen wir das Produkt der Extremstellen:

$$\begin{aligned}
x_1\cdot x_2 &= (-1+\sqrt{1+a})\cdot(-1-\sqrt{1+a}) \\
&= (-1)\cdot(-1)-(-1)\cdot\sqrt{1+a}+\sqrt{1+a}\cdot(-1)-\sqrt{1+a}\cdot\sqrt{1+a} \\
&= 1+\sqrt{1+a}-\sqrt{1+a}-(1+a) \\
&= 1-1-a \\
&= -a
\end{aligned}$$

Für die Funktionswerte an den Extremstellen gilt:

$$h_a(x) = \frac{1}{a}\cdot(a-x^2)\cdot e^x$$

Das Produkt der Funktionswerte ist:

$$
\begin{aligned}
h_a(x_1) \cdot h_a(x_2) &= \frac{1}{a} \cdot (a - x_1^2) \cdot e^{x_1} \cdot \frac{1}{a} \cdot (a - x_2^2) \cdot e^{x_2} \\
&= \frac{1}{a^2} \cdot (a - x_1^2) \cdot (a - x_2^2) \cdot e^{x_1} \cdot e^{x_2} \\
&= \frac{1}{a^2} \cdot (a - x_1^2) \cdot (a - x_2^2) \cdot e^{x_1 + x_2}
\end{aligned}
$$

Durch Einsetzen von $x_1 + x_2 = -2$ erhalten wir:

$$
h_a(x_1) \cdot h_a(x_2) = \frac{1}{a^2} \cdot (a - x_1^2) \cdot (a - x_2^2) \cdot e^{-2}
$$

Nach weiteren algebraischen Umformungen und durch Einsetzen der Bedingung $x_1 \cdot x_2 = h_a(x_1) \cdot h_a(x_2)$ erhalten wir die Gleichung:

$$
-a = \frac{1}{a^2} \cdot (a - x_1^2) \cdot (a - x_2^2) \cdot e^{-2}
$$

Diese Gleichung lässt sich mit einem Computer-Algebra-System lösen und ergibt:

$$
a = \frac{2}{e} \left(\vee a = -\frac{2}{e} \notin \mathbb{D}_a \right)
$$

Da $a > 0$ sein muss, ist $a = \frac{2}{e}$ die einzige Lösung.

Geometrie

zu Aufgabe 1:

a) 1) Ist φ der Winkel, der von den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ eingeschlossen wird, so kann φ berechnet werden durch:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} \circ \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Der Winkel $\delta = \angle EDF$ wird eingeschlossen von den Vektoren $\overrightarrow{DE}$ und $\overrightarrow{DF}$, sodass gilt:

$$\begin{aligned}\cos(\delta) &= \frac{\overrightarrow{DE} \circ \overrightarrow{DF}}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\overrightarrow{DF}|} \\ &= \frac{\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|} \\ &= \frac{36}{10 \cdot 6} = 0{,}6 \Rightarrow \delta \approx 53{,}13^\circ\end{aligned}$$

2) Die Oberfläche eines geraden Prismas mit der Grundfläche G, dem Grundflächenumfang U und der Höhe h berechnet sich nach der Formel

$$O = 2 \cdot G + U \cdot h$$

Zwei Seiten des Grundflächendreiecks liegen auf der x_1- bzw. x_2-Achse, das Dreieck ist somit rechtwinklig.

Der Flächeninhalt eines rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten a und b berechnet sich nach der Formel $A = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b$.

Für die benötigten Längen gilt:

$$|\overrightarrow{FD}| = \left|\begin{pmatrix}6\\0\\0\end{pmatrix}\right| = 6\text{ [LE]},$$

$$|\overrightarrow{FE}| = \left|\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}\right| = 8\text{ [LE]},$$

$$|\overrightarrow{CF}| = \left|\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix}\right| = 5\text{ [LE] und}$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \left|\begin{pmatrix}-6\\8\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+64} = 10\text{ [LE]}$$

Einsetzen der berechneten Größen führt zu:

$$O = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 8 + (6+8+10)\cdot 5 = 48 + 120 = 168\text{ [FE]}$$

b) 1) Mit dem Punkt S_t als Anbindungspunkt und den Spannvektoren $\overrightarrow{S_tM}$ und $\overrightarrow{S_tF}$ erhält man als Parameterform der Ebene:

$$\begin{aligned} W_t : \vec{x} &= \begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix} + k\cdot\left(\begin{pmatrix}3\\4\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}\right) + \ell\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\0\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix}\right)\\ &= \begin{pmatrix}t\\0\\0\end{pmatrix} + k\cdot\begin{pmatrix}3-t\\4\\5\end{pmatrix} + \ell\cdot\begin{pmatrix}-t\\0\\5\end{pmatrix}; k,\ell\in\mathbb{R}, t\geq 0\end{aligned}$$

2) Ein Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}n_1\\n_2\\n_3\end{pmatrix}$ steht senkrecht auf den Spannvektoren der Ebene W_t, das Skalarprodukt von Normalenvektor und Spannvektor

ist demnach gleich 0.

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 3-t \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{ I } \quad (3-t)\cdot n_1 + 4n_2 + 5n_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \text{ II } \quad -t\cdot n_1 + 5n_3 = 0$$

Subtraktion der Gleichungen ergibt:

$$\text{I} - \text{II} : 3 \cdot n_1 + 4n_2 = 0$$

Wählt man $n_1 = 4$, so ist $n_2 = -3$. Einsetzen in Gleichung II ergibt:

$$-4t + 5n_3 = 0 \Leftrightarrow n_3 = \frac{4}{5}t$$

Ein Normalenvektor lautet:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ \frac{4}{5}t \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 4t \end{pmatrix}$$

Alternativ: mithilfe des Vektorprodukts

$$\begin{aligned} \vec{n}_t &= \begin{pmatrix} 3-t \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4\cdot 5 - 5\cdot 0 \\ 5\cdot(-t) - (3-t)\cdot 5 \\ (3-t)\cdot 0 - 4\cdot(-t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 4t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3) Ist φ der Winkel zwischen den Ebenen $E_1 : \vec{n}_1 \circ \vec{x} = d_1$ und $E_2 : \vec{n}_2 \circ \vec{x} = d_2$, so kann φ berechnet werden durch die Formel $\cos(\varphi) = \frac{|\vec{n}_1 \circ \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$.

Die x_1x_2-Ebene hat den Normalenvektor $\vec{n}_{x_1x_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, die Ebene W_5 den Normalenvektor $\vec{n}_5 = \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 20 \end{pmatrix} = 5 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$. Einsetzen der Normalenvektoren zur Berechnung des Winkels zwischen zwei Ebenen ergibt:

$$\cos(\varphi) = \frac{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}{\left| \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right|}$$
$$= \frac{4}{\sqrt{41} \cdot 1} \Rightarrow \varphi \approx 51{,}34^\circ$$

4) Der Punkt B ist der Lotfußpunkt des Lotes von E auf die x_1x_2-Ebene. Die x_1- und x_2-Koordinate bleiben erhalten und x_3-Koordinate nimmt den Wert null an. Die Koordinaten von B lauten folglich B(0|8|0).

Die Strecke $\overline{BD}$ verläuft senkrecht zur Ebene W_t, wenn der Richtungsvektor der Strecke und der Normalenvektor der Ebene parallel verlaufen. Ist dies der Fall, so sind die Vektoren linear abhängig.

Zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig, wenn $\vec{u} = k \cdot \vec{v}$, $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ gilt.

Mit $\overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix}$ erhält man dann die Gleichung:

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} = k \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 4t \end{pmatrix}$$

Umschreiben der Vektorgleichung in die Koordinatengleichungen und Lösen der ersten beiden Gleichungen ergibt $k = \frac{3}{10}$ und $k = \frac{8}{15}$.

Es gibt kein t, sodass die Strecke $\overline{BD}$ senkrecht zur Ebene W_t verläuft.

5) Da g_t senkrecht zur Ebene W_t verläuft, sind der Richtungsvektor der Geraden und der Normalenvektor der Ebene linear abhängig.

$$g_t : \vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 4t \end{pmatrix}, k \in \mathbb{R}$$

Die x_1x_2-Ebene hat die Gleichung $x_3 = 0$. Einsetzen der x_3-Koordinate der Geraden g_t führt zur Gleichung:

$$5 + 4kt = 0 \Leftrightarrow k = -\frac{5}{4t}$$

Einsetzen von $k = -\frac{5}{4t}$ in die Gleichung der Geraden g_t führt zum Ortsvektor des Punktes Q.

$$\begin{aligned} \vec{q} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} - \frac{5}{4t} \cdot \begin{pmatrix} 20 \\ -15 \\ 4t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 6 - \frac{25}{t} \\ \frac{75}{4t} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow Q_t \left(6 - \frac{25}{t} \middle| \frac{75}{4t} \middle| 0 \right) \end{aligned}$$

6) Umschreiben der Koordinaten von P in die Vektorschreibweise ergibt:

$$\vec{p} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}; 0 \leq r \leq 1$$

P gibt somit alle Punkte der Strecke $\overline{AB}$ an.
Ergänzt man bei Schritt (II) im Gleichungssystem noch die wahre Aussage 0 = 0, so stehen auf der linken Seite der Gleichung die Koordinaten von Q_t und auf der rechten Seite die Koordinaten der Strecke $\overline{AB}$. Es wird eine Punktprobe durchgeführt, ob es einen Punkt Q_t gibt, der auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

Eine passende Aufgabenstellung könnte sein:
Untersuchen Sie, ob der Punkt Q_t für einen Wert von t auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

Schritt (III) bedeutet geometrisch, dass es kein t gibt, sodass der Punkt Q_t auf der Strecke $\overline{AB}$ liegt.

Stochastik

zu Aufgabe 1:

a) 1) Als Grundgesamtheit werden zunächst alle Abonnenten betrachtet. Die relevanten Ereignisse sind:

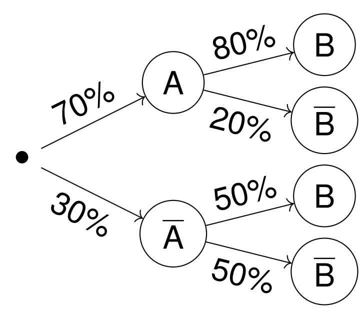
A : „Ein Abonnent ist höchstens 40 Jahre alt."

$\overline{A}$: „Ein Abonnent ist älter als 40 Jahre."

B : „Ein Abonnent hat das Komplettpaket gewählt."

$\overline{B}$: „Ein Abonnent hat das Spielfilmpaket gewählt"

Wir beziehen uns in der ersten Stufe auf das Ereignis A, da das Ereignis B auf das Ereignis A bezogen wird und somit sinnvoller in der Stufe zwei ist.



2) Berechnung der bedingten Wahrscheinlichkeit:

Gesucht ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$, also die Wahrscheinlichkeit, dass ein Abonnent höchstens 40 Jahre alt ist, unter der Bedingung, dass er das Komplettpaket gewählt hat.

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis B beträgt zunächst:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) \\ &= P(A) \cdot P(B|A) + P(\overline{A}) \cdot P(B|\overline{A}) \\ &= 0{,}7 \cdot 0{,}8 + 0{,}3 \cdot 0{,}5 \\ &= 0{,}56 + 0{,}15 \\ &= 0{,}71 \end{aligned}$$

Die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit $P_B(A)$ berechnet sich durch:

$$\begin{aligned} P_B(A) &= \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \\ &= \frac{0{,}7 \cdot 0{,}8}{0{,}71} \\ &= \frac{0{,}56}{0{,}71} \\ &\approx 0{,}79 \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit beträgt somit 79%.

3) Bestimmung der Mindestanzahl an Abonnenten:
Sei Z die Zufallsgröße mit:

Z : Anzahl der Abonnenten, die älter als 40 Jahre sind

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $\overline{A}$ beträgt:

$$\begin{aligned} P(\overline{A}) &= 1 - P(A) \\ &= 1 - 0{,}7 \\ &= 0{,}3 \end{aligned}$$

Da die Grundgesamtheit sehr groß ist, können wir Z als binomialverteilt annehmen:

$$Z \sim B(n; 0{,}3)$$

Gesucht ist das kleinste n mit:

$$P_{0,3}^{n}(Z \geq 21) \geq 0{,}99$$

Systematisches Probieren ergibt:

$$\begin{aligned} P_{0,3}^{103}(Z \geq 21) &\approx 0{,}9895 < 0{,}99 \\ P_{0,3}^{104}(Z \geq 21) &\approx 0{,}9910 > 0{,}99 \end{aligned}$$

Somit ist $n = 104$ die gesuchte Mindestanzahl an Abonnenten, damit unter ihnen mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99% mehr als 20 Personen älter als 40 Jahre sind.

b) 1) Analyse der Nullhypothese:
Wir betrachten die beiden möglichen Fehlerarten:

$$\begin{aligned} H_0 &: \; p \leq 0{,}6 \text{ (Nullhypothese)} \\ H_1 &: \; p > 0{,}6 \text{ (Alternativhypothese)} \end{aligned}$$

Wenn sich durch den Einsatz des Algorithmus die Zufriedenheit unter den Abonnenten nicht erhöht, so muss die Nullhypothese beibehalten werden. Dann wird der Algorithmus nicht dauerhaft eingesetzt und man spart Kosten.

Die Wahrscheinlichkeit für den Fehler 1. Art wird auf 5% begrenzt, während ein höheres Risiko für den Fehler 2. Art akzeptiert wird.

2) Ergänzung des fehlenden Lösungsschritts:

Da $H_0 : p \leq 0{,}6$, führen wir einen rechtsseitigen Test durch. Für den Ablehnungsbereich $A = \{g; \ldots ; n\}$ gilt:

$$0 \leq g \leq n \quad \text{mit} \quad n = 200$$

Die Zufallsgröße X ist binomialverteilt:

$$\begin{aligned} X &\sim B(200; 0{,}6) \\ X &: \text{Anzahl der zufriedenen Abonnenten} \end{aligned}$$

Gegeben ist:

$$P_{0{,}6}^{200}(X \geq 132) \quad \approx \quad 0{,}047 < 0{,}05$$

Dies zeigt $g \leq 132$. Für den Nachweis, dass $g = 132$ die kleinste mögliche Zahl ist, muss gelten:

$$P_{0{,}6}^{200}(X \geq 131) \quad > \quad 0{,}05$$

Berechnung ergibt:

$$P_{0{,}6}^{200}(X \geq 131) \quad \approx \quad 0{,}064 > 0{,}05$$

Dies ist der fehlende Berechnungsschritt, um sicher sagen zu können, dass $g = 132$ die gesuchte Zahl ist.

3) Nachweis des Fehlers zweiter Art:

Wenn die Anzahl der zufriedenen Kunden größer als 60% ist, dann kann beispielsweise $p = 0{,}61$ gewählt werden.

Für die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art gilt mit n = 200 und g = 132:

$$\begin{aligned} P_{0{,}61}^{200}(X \leq 131) &\approx 0{,}917 \\ &> 0{,}9 \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass die Wahrscheinlichkeit für den Fehler zweiter Art über 90% liegt.

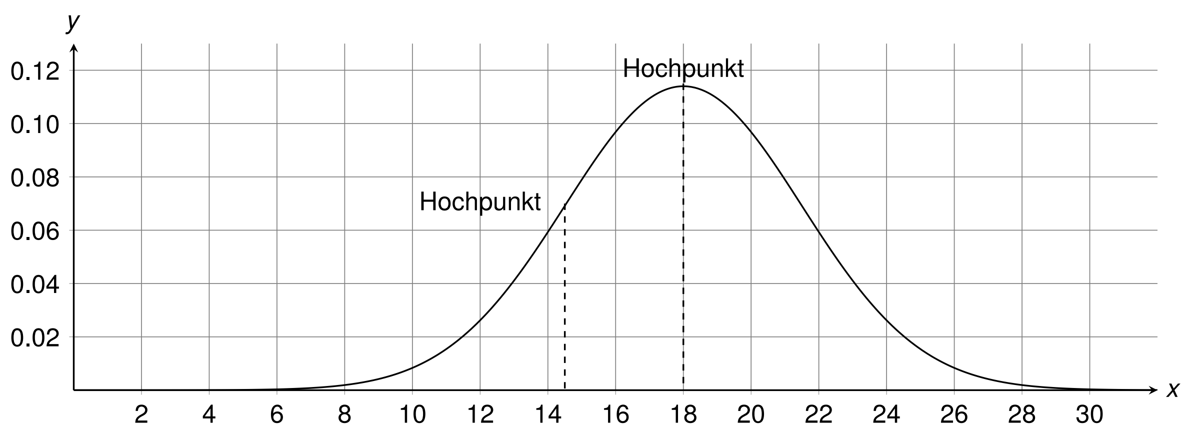
c) 1) Es wird die Wahrscheinlichkeit für eine Normalverteilung mit $\mu_Y = 8{,}87$, $\sigma_Y = 2{,}20$ und $10 < Y < 7 \cdot 24 = 168$ gesucht.

Die Berechnung ergibt:

$$P(10 < Y < 168) \approx 0{,}304$$

Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass eine zufällig ausgewählte Person im Alter von mindestens 14 Jahren in einer zufällig ausgewählten Woche mehr als 10 Stunden streamt, beträgt somit ca. 30,4%.

2) Der Erwartungswert μ einer Normalverteilung gibt an, an welcher Stelle die Normalverteilung ein Maximum hat. Der Graph einer Normalverteilung ist immer symmetrisch zur Geraden x = μ.



Anhand des Graphen von φ_Z kann man den Hochpunkt an der Stelle $x_H \approx 18$ ablesen, deshalb gilt $\mu_Z \approx 18$.

Die Standardabweichung σ lässt sich aus dem Abstand der x-Koordinaten des Hochpunktes und eines Wendepunktes der Normalverteilung ermitteln. Der linke Wendepunkt des Graphen von φ_Z liegt ungefähr an der Stelle $x_w \approx 14{,}5$.

Es ergibt sich $\sigma_Z \approx x_H - x_w \approx 18 - 14{,}5 = 3{,}5$.